राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा अभियान योजनान्तर्गत

हाईस्कूल स्तरीय गणित शिक्षक संदर्शिका

(कक्षा 9 एवं कक्षा 10)

विज्ञान एवं गणित विभाग

(राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0, इलाहाबाद)

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद

उत्तर प्रदेश, लखनऊ

संयोजन	-	पार्थ सारथी सेन शर्मा, आई.ए.एस. राज्य परियोजना निदेशक, 18 पार्क रोड, लखनऊ
परामर्श	-	सर्वेन्द्र विक्रम सिंह, अपर राज्य परियोजना निदेशक, राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा अभियान, उ. प्र., 18-पार्क रोड, लखनऊ
संरक्षण	-	महेन्द्र सिंह, निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, उ0प्र0, लखनऊ
निर्देशन	-	भावना शिक्षार्थी, निदेशक, राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0, इलाहाबाद
मार्गदर्शन	-	डॉ0 जी0पी0 दीक्षित (सेवा निवृत्त विभागाध्यक्ष, गणित विभाग, लखनऊ) एवं डॉ0 वी0पी0 सिंह, एसोसिएट प्रोफेसर, एन0 सी0 ई0 आर0 टी0 नई दिल्ली।
सम्पादन एवं समन्वयन	-	रागिनी श्रीवास्तव, राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0 इलाहाबाद
समीक्षक	-	डॉ0 वी. पी. सिंह, एसोसिएट प्रोफेसर एवं डॉ0 पी0के0 चौरसिया, असिस्टेंट प्रोफेसर, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, एन0सी0ई0आर0टी0 नई दिल्ली
लेखक मण्डल	-	रागिनी श्रीवास्तव, श्रुतिदेव सिंह, रीता सक्सेना, रामानन्द चौधरी एवं अशोक चौरसिया, प्रोफेसर, राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0 इलाहाबाद; श्रीप्रकाश पाण्डेय, से0नि0शोध सहायक, मा0शि0प0 इलाहाबाद; दिवाकर पाण्डे, से0नि0 प्रवक्ता गणित, डायट पकवा इनार, बलिया; रमेश मिश्र, से0नि0प्रोफेसर, राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0 इलाहाबाद; सिया राम पाल से0नि0 प्रधानाचार्य सुरवादलापुर इलाहाबाद; पंकज लोहानी, से0नि0 प्रधानाचार्या, रा0बा0इ0का0, मुंगारी, करछना, इलाहाबाद; डॉ0 रमेश चन्द्र, प्रवक्ता (गणित), रा0इ0का0फैजाबाद, राकेश कुमार पाण्डेय, प्रवक्ता (गणित) रा0 इ0 का0 सुरवा दलापुर (माण्डा) इलाहाबाद, अरविन्द कुमार प्रवक्ता (गणित), रा0इ0का0 इलाहाबाद एवं आशीष कुमार श्रीवास्तव, प्रवक्ता गणित, ए0बी0आई0सी0इलाहाबाद;
कम्प्यूटर कम्पोजिंग	-	सन्तोष कुमार

आमुख

राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा अभियान के अन्तर्गत एन0सी0एफ0 2005 के अनुरूप माध्यमिक शिक्षा परिषद, उत्तर प्रदेश द्वारा हाईस्कूल की पाठ्यचर्या का संशोधित नवीकृत स्वरूप शैक्षिक सत्र 2011-12 से पूरे प्रदेश में लागू है। पूरा पाठ्यक्रम कक्षा 9 और कक्षा 10 के अलग-अलग दो भागों में विभाजित है जिसके फलस्वरूप शिक्षार्थियों के मन-मस्तिष्क पर पाठ्यक्रम का बोझ कम हुआ है और शिक्षा ग्रहण करने की दिशा में उल्लासित वातावरण का सृजन हुआ है। विज्ञान और गणित विषयों की परीक्षा के स्वरूप में भी भारी बदलाव किया गया है। अब तक जहाँ इन विषयों में दो-दो लिखित प्रश्नपत्र होते थे, अब वहाँ केवल एक ही प्रश्नपत्र होगा जिस कारण इन विषयों के उपविषयों पर निर्धारित अंकों के भार की प्रतिशतता भी प्रभावित हुई है। अब विचारणीय बिन्दु यह है कि शिक्षक किस प्रकार विज्ञान और गणित विषय की नवीन पाठ्यचर्चा के सम्बोधों का शिक्षार्थियों तक प्रभावी सम्प्रेषण करें तथा किस भांति शिक्षार्थियों के ज्ञानार्जन में शिक्षक फेसिलटेटर की भूमिका निभाते हुए शिक्षार्थियों को विशेष महत्व दें। नवीन पाठ्यचर्या का उद्देश्य मात्र पुस्तक आधारित ज्ञान प्रदान करना नहीं है बल्कि इसका उद्देश्य है शिक्षार्थी के सम्पूर्ण व्यक्तित्व का सर्वांगीण व्यापक विकास जिसके फलस्वरूप वह भविष्य में समाज में सुव्यवस्थित जीवन जीने की कला सीख सके, अपने दैनिक जीवन की समस्याओं का स्वयं हल ढूढ़ सके और राष्ट्र के विकास की कड़ी में सार्थक रूप से जुड़ सके। उपर्युक्त दृष्टिकोण के आलोक में अब यह आवश्यक है कि शिक्षकों का व्यापक सेवारत प्रशिक्षण आयोजित किये जायें। शिक्षकों के सार्थक एवं प्रभावी प्रशिक्षण के लिए सर्वप्रथम प्रशिक्षण सामग्री की आवश्यकता को अनुभव करते हुए नवीन शिक्षक संदर्शिका के निर्माण का दायित्व राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उत्तर प्रदेश, इलाहाबाद को दिया गया है। संस्थान ने इस दायित्व को सहर्ष स्वीकार करते हुए विज्ञान एवं गणित विषयों की शिक्षक सन्दर्शिकाओं का निर्माण किया है।

प्रस्तुत शिक्षक सन्दर्शिका में कठिन संबोधों को सरल एवं बोधगम्य बनाने का प्रयास किया गया है। पाठ्यपुस्तक में साधित उदाहरणों के हल की वैकल्पिक विधियों का समावेश सन्दर्शिका में किया गया है। क्रिया-कलाप के माध्यम से शिक्षार्थियों के सीखने की गतिविधि को सुरुचिपूर्ण बनाने के लिए शिक्षकों को प्रेरित किया गया है। शिक्षार्थियों के परिवेश का ध्यान रखते हुए दैनिक जीवन की क्रिया-विधियों को शिक्षण-विधि से जोड़ा गया है जिससे ज्ञानार्जन में शिक्षार्थी असहजता का अनुभव न करे बल्कि सोल्लास और पूर्ण चेतना के साथ शिक्षण-विधा से जुड़ सके।

प्रस्तुत शिक्षक सन्दर्शिका के विकास में जिन विषय विशेषज्ञों के अनुभव एवं अप्रतिम ज्ञान का संबल हमें पूर्ण कार्यनिष्ठा एवं समर्पण के साथ प्राप्त हुआ है जिसके बल पर अल्पावधि में यह सन्दर्शिका सार्थक आकार ग्रहण कर सकी है, उनके प्रति मैं हार्दिक धन्यवाद ज्ञापित करती हूँ। साथ ही डा0 जी.पी.दीक्षित, अवकाश प्राप्त गणित

विभागाध्यक्ष, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ द्वारा लेखक मण्डल के प्रत्येक सदस्य को लेखन के दौरान दिये गये सार्थक परामर्श हेतु में उनका भी आभार व्यक्त करती हूँ।

महेन्द्र सिंह निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद, उत्तर प्रदेश, लखनऊ के कुशल निर्देशन में ही यह सम्पूर्ण कार्य समुचित ढंग से पूर्णता को प्राप्त हुआ है। मैं उनके प्रति हार्दिक कृतज्ञता ज्ञापित करती हूँ।

संदर्शिका के प्रणयन की कार्यशालाओं के आयोजन, मुद्रण एवं प्रकाशन के प्रत्येक पग पर संस्थान के समस्त अधिकारियों एवं समर्पित कर्मियों का हमें पूरा सहयोग प्राप्त हुआ है जिसके फलस्वरूप यह सन्दर्शिका प्रस्तुत पुस्तक के रूप में अल्प समय में सामने आ सकी है। एतदर्थ मैं अपने समस्त सहयोगियों को धन्यवाद देती हूँ।

प्रस्तुत सन्दर्शिका के त्रुटियों के निराकरण हेतु में सभी सुधी पाठकों का आवाहन करती हूँ, जिनके अमूल्य सुझावों का सम्मान करने के दायित्व निर्वहन को मैं अपना कर्तव्य मानती हूँ।

मुझे विश्वास है कि प्रस्तुत सन्दर्शिका निहित उद्देश्यों की प्रतिपूर्ति की कसौटी पर खरी उतरेगी।

जनवरी 2013

(भावना शिक्षार्थी)
निदेशक
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान,
उ. प्र. इलाहाबाद

विषय सूची

भाग 1 (कक्षा 9)

भाग-2 (कक्षा-10)

शिक्षक और शिक्षण

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रुपरेखा-2005

सार संक्षेप

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद की कार्यकारिणी ने 14 एवं 19 जुलाई, 2004 की बैठकों में राष्ट्रीय पाठ्यचर्चा को संशोधित करने का निर्णय लिया। यह निर्णय माननीय मानव संसाधन विकास मंत्री द्वारा लोकसभा में दिए गये इस वक्तव्य के अनुसरण में लिया गया कि परिषद् को यह संशोधन करना चाहिए। इसी क्रम में मानव संसाधन विकास मंत्रालय के शिक्षा सचिव ने परिषद् के निदेशक को एक पत्र लिखा। पत्र में उन्होंने 1993 की 'शिक्षा बिना बोझ के' रपट की रोशनी में विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन0सी0एफ0एस0ई0) 2000 की समीक्षा करने की आवश्यकता व्यक्त की। इन्हीं निर्णयों के संदर्भ में प्रोफेसर यशपाल की अध्यक्षता में एक राष्ट्रीय संचालन समिति और इक्कीस राष्ट्रीय फोकस समूहों का गठन किया गया। इन समितियों में उच्च शिक्षा संस्थानों के प्रतिनिधि, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के अकादमिक सदस्य, स्कूलों के शिक्षक और गैर-सरकारी संगठनों के प्रतिनिधि सदस्यों के रूप में शामिल हुए। देश के हर हिस्से में इन मुद्दे पर विचार-विमर्श एवं चिंतन किया गया। इसके साथ ही मैसूर, अजमेर, भुवनेश्वर, भोपाल और शिलांग में स्थित परिषद के क्षेत्रीय शिक्षा संस्थानों में क्षेत्रीय संगोष्ठियों का आयोजन किया गया। राज्यों के सचिवों, राज्यों की शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषदों और परीक्षा बोर्ड के सदस्यों से विचार-विमर्श किया गया। ग्रामीण शिक्षकों से सुझाव लेने के लिए एक राष्ट्रीय और क्षेत्रीय समाचार पत्रों में विज्ञापन दिए गये जिससे लोग नयी पाठ्यचर्या के बारे में अपनी राय दें सकें और बड़ी तादाद में लोगों की प्रतिक्रियाएँ आईं।

संशोधित राष्ट्रीय पाठ्यचर्या दस्तावेज़ का आरम्भ रविन्द्रनाथ टैगोर के निबंध "सभ्यता और प्रगति" के एक उद्धरण से होता है, जिसमें कविगुरु हमें याद दिलाते हैं कि सृजनात्मकता और उदार आनंद बचपन की कुंजी हैं और नासमझ वयस्क संसार द्वारा उनकी विकृति का खतरा है। आरम्भिक अध्याय में स्वतंत्रता के बाद किए गये पाठ्यचर्या में सुधार के प्रयासों की चर्चा की गई है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन0पी0ई0) 1986 में यह प्रस्तावित किया गया था कि राष्ट्रीय पाठ्यचर्या को शिक्षा की राष्ट्रीय व्यवस्था विकसित करने का एक साधन होना चाहिए जो भारतीय संविधान में राष्ट्रीय निर्माण के दर्शन को अपनी आधार भूमि माने। कार्य योजना (पी0ओ0ए0) 1992 ने प्रासंगिकता, लचीलेपन और गुणवत्ता के तत्वों पर जोर देते हुए इसके दायरे को थोड़ा और विस्तृत किया।

सामाजिक न्याय और समानता के संवैधानिक मूल्यों पर आधारित एक धर्मनिरपेक्ष, समतामूलक और बहुलतावादी समाज के आदर्श से प्रेरणा लेते हुए इस दस्तावेज में शिक्षा के कुछ व्यापक उद्देश्य चिह्नित किए गए

हैं। इनमें शामिल हैं विचार और कर्म की स्वतंत्रता, दूसरों की भलाई और भावनाओं के प्रति संवेदनशीलता, नयी स्थितियों का लचीलेपन और रचनात्मक तरीके से सामना करना, लोकतांत्रिक प्रक्रिया में भागीदारी की प्रवृत्ति और आर्थिक प्रक्रियाओं तथा सामाजिक बदलाव में योगदान देने के लिए काम करने की क्षमता। अगर शिक्षा को जीने के लोकतांत्रिक तरीकों को सुदृढ़ करना है तो उसे स्कूल में जाने वाली पहली पीढ़ी की उपस्थिति का भी ध्यान रखना ही होगा।

स्कूल में बने रहना उस संविधान संशोधन के चलते अनिवार्य हो गया है, जिसने आरंभिक शिक्षा को हर बच्चे का मौलिक अधिकार बना दिया है। संविधान के इस संशोधन से हम पर यह जिम्मेदारी आ गई है कि हम सारे बच्चों को जाति, धर्म सम्बन्धी अन्तर, लिंग और असमर्थता सम्बन्धी चुनौतियों से निरपेक्ष रहते हुए स्वास्थ्य, पोषण और समावेशी स्कूली माहौल मुहैया कराएँ जो उनको शिक्षा ग्रहण में मदद पहुँचाए तथा उन्हें सशक्त बनाए। हमारे शैक्षिक उद्देश्यों और शिक्षा की गुणवत्ता में आज गहरी विकृति आ गई है, इसका प्रमाण है यह तथ्य कि शिक्षा बच्चों और उनके माँ-बाप के लिए तनाव और बोझ का कारण बन गई है। इस विकृति को दुरूस्त करने के लिए पाठ्यचर्या के इस दस्तावेज ने पाठ्यचर्या निर्माण के पाँच निर्देशक सिद्धान्तों का प्रस्ताव रखा है : 1. ज्ञान को स्कूल के बाहरी जीवन से जोड़ना, 2. पढ़ाई रटन्त प्रणाली से मुक्त हो - यह सुनिश्चित करना, 3. पाठ्यचर्या का इस तरह संवर्धन कि वह बच्चों को बहुमुखी विकास के अवसर उपलब्ध करवाए। वह पाठ्य पुस्तक केन्द्रित बनकर न रह जाय। 4. परीक्षा को अपेक्षाकृत अधिक लचीला बनाना और कक्षा की गतिविधियों से जोड़ना, और 5. एक ऐसी अधिभावी पहचान का विकास जिसमें प्रजातांत्रिक राज्य-व्यवस्था के अन्तर्गत राष्ट्रीय चेतना समाहित हों।

आरंभिक कक्षाओं के दौरान हमारे सारे शैक्षणिक प्रयास इस बात पर बहुत निर्भर करते हैं कि पूर्व प्राथमिक शिक्षा (ई0सी0ई0) की योजना पेशेवर दक्षता के साथ बनाई जाए और उसका सार्थक विस्तार किया जाए। दरअसल आरंभिक स्कूली पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकों में कोई भी सुधार पूर्व प्राथमिक शिक्षा (ई0सी0ई0) के बहुपरिचित सिद्धान्तों की रोशनी में ही किया जाना चाहिए। अध्याय 2 में ज्ञान की प्रकृति और बच्चों को सीखने की कार्यनीतियों पर चर्चा की गई है जो अध्याय 3 में दिए गये उन सुझावों का सैद्धान्तिक आधार निरूपित करती है जो पाठ्यचर्या के विभिन्न क्षेत्रों के लिए दिए गए हैं। यह तथ्य कि बच्चा ज्ञान का सृजन करता है, इसका निहितार्थ है कि पाठ्यचर्या, पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तकें शिक्षक को इस बात के लिए सक्षम बनाएँ कि वे बच्चों की प्रकृति और वातावरण के अनुरुप कक्षायी अनुभव आयोजित करें ताकि सारे बच्चों को अवसर मिल पाएँ। शिक्षण का उद्देश्य बच्चे के सीखने की सहज इच्छा और युक्तियों को समृद्ध करना होना चाहिए। ज्ञान को सूचना से अलग करने की जरूरत है और शिक्षण को एक पेशेवर गतिविधि के रूप में पहचानने की जरूरत है न कि तथ्यों के रटने और प्रसार के प्रशिक्षण के रूप में। सक्रिय गतिविधि के जरिए ही बच्चा अपने आस-पास की दुनिया को समझाने की कोशिश करता है। इसलिए प्रत्येक साधन का उपयोग इस तरह किया जाना चाहिए कि बच्चों को खुद ही अभिव्यक्त करने में, वस्तुओं का इस्तेमाल करने में अपने प्राकृतिक और सामाजिक परिवेश की खोजबीन करने में और स्वस्थ रूप में विकसित होने में मदद मिले। अगर बच्चों के कक्षा में अनुभवों को इस तरह आयोजित करना हो जिससे उन्हें ज्ञान सृजित का अवसर मिले तो हमारी स्कूली व्यवस्था में व्यापक व्यवस्थागत सुधारों की जरूरत होगी (पाँचवी अध्याय) और स्कूल के लोकाचार की गुणवत्ता को सुधारने के लिए संसाधन जुटाए जाएँ। (चौथा अध्याय)।

स्कूली पाठ्यचर्या के चार सुपरिचित क्षेत्रों भाषा, गणित, विज्ञान और समाज विज्ञान में महत्वपूर्ण परिवर्तनों में सुझाव दिया गया है। इस दृष्टि से कि शिक्षा आज की और भविष्य की जरूरतों के लिए ज्यादा प्रासंगिक बन सके और बच्चों को उस दबाव से मुक्त किया जा सके जो वे आज झेल रहे हैं। यह राष्ट्रीय पाठ्यचर्या दस्तावेज़ इस बात की सिफारिश करता है कि विषयों के बीच में दीवारें नीची कर दी जाएँ ताकि बच्चों को ज्ञान का समग्र आनंद मिल सके और किसी चीज़ को समझने से मिलने वाली खुशी हासिल हो सके। इसके साथ यह भी सुझाया गया कि पाठ्यपुस्तक और दूसरी सामग्री की बहुलता हो, जिसमें स्थानीय ज्ञान और पारंपरिक कौशल शामिल हो सकते हैं और बच्चों के घर सामुदायिक परिवेश से जीवंत संबंध बनाने वाले स्फूर्तिदायक स्कूली माहौल को सुनिश्चित किया जा सके। भाषा में त्रिभाषा फार्मूले को लागू करने के फिर से प्रयास का सुझाव दिया गया है जिसमें आदिवासी भाषाओं सहित बच्चों की मातृभाषाओं को शिक्षा के माध्यम के रूप में स्वीकृत देने पर ज़ोर है। प्रत्येक बच्चे में बहुभाषिक प्रवीणता विकसित करने के लिए भारतीय समाज के बहुभाषिक चरित्र को एक संसाधन के रूप में देखना चाहिए जिसमें अंग्रेजी में प्रवीणता भी शामिल है। यह तभी मुमकिन है कि भाषा का पुख्ता शिक्षाशास्त्र मातृभाषा के उपयोग पर आधारित हो। पढ़ना, लिखना, बोलना और सुनना - ये क्रियाएँ पाठ्यचर्या के सभी क्षेत्रों में बच्चों की प्रगति में भूमिका निभाती हैं और इन्हें पाठ्यचर्या की योजना का आधार होना चाहिए। आरम्भिक कक्षाओं के पूरे दौर में पढ़ने पर ज़ोर देना ज़रूरी है जिससे हर बच्चे को स्कूली शिक्षा का ठोस आधार मिल सके।

गणित की शिक्षा ऐसी होनी चाहिए जिससे बच्चों के वे संसाधन समृद्ध हों जो चिंतन और तर्क में अमूर्तनों की संकल्पना करने और उनका व्यवहार करने में, समस्याओं को सूत्रबद्ध करने और सुलझाने में उनकी सहायता करें। उद्देश्यों का यह व्यापक फलक उस प्रासंगिक और अर्थपूर्ण गणित को पढ़ाकर तय किया जा सकता है जो बच्चों के अनुभवों में गुथी हुई हो। गणित में सफलता को हर बच्चे के अधिकार की तरह देखा जाना चाहिए। इसके लिए गणित के दायरे को और विस्तृत करने की जरूरत है और इसे दूसरे विषयों से जोड़ने की जरूरत है। हर स्कूल को कम्प्यूटर, हार्डवेयर, साफ्टवेयर और कनैक्टिविटी मुहैया कराने जैसी ढाँचागत चुनौतियों का सामना करने की जरूरत है।

विज्ञान के शिक्षण में इस तरह की तब्दीली की जानी चाहिए कि यह हर बच्चे को अपने रोज के अनुभवों को जाँचने और उनका विश्लेषण करने में सक्षम बनाए। परिवेश सम्बन्धी सरोकारों और चिंताओं पर हर विषय में जोर दिये जाने की जरूरत है और यह ढेरों गतिविधियों और बाहरी दुनिया पर की गई परियोजनाओं के द्वारा होना चाहिए। इस प्रकार की परियोजना के माध्यम से निकलने वाली सूचनाओं और समझ के आधार पर भारतीय पर्यावरण को लेकर एक सर्वसुलभ और पारदर्शी आंकड़ा-संग्रह तैयार हो सकता है जो अत्यन्त उपयोगी शैक्षणिक संसाधन साबित होगा। यदि विद्यार्थियों की परियोजनाएँ सुनियोजित हों तो उनसे ज्ञान सृजित होगा। बाल विज्ञान कांग्रेस की तर्ज पर एक सामाजिक आंदोलन की कल्पना की जा सकती है जिससे पूरे देश में अन्वेषण की शिक्षा को प्रोत्साहन मिलेगा जो बाद में पूरे दक्षिण एशिया में फैल सकता है।

सामाजिक विज्ञान में पाठ्यचर्या के इस दस्तावेज द्वारा प्रस्तावित उपागम ज्ञान के क्षेत्रों की विशिष्ट सीमाओं को पहचानता है और साथ ही 'पानी' जैसे महत्वपूर्ण मुद्दों के लिए समाकलन पर जोर देता है। हाशिए पर ढकेल दिए गए समूहों की दृष्टि से समाज विज्ञान के अध्ययन का प्रस्ताव करते हुए नजरिए में एक पूरी तब्दीली की

सिफारिश की गई है। सामाजिक विज्ञान के सारे पहलुओं में जेंडर के संदर्भ में न्याय और अनुसूचित जाति तथा जनजाति के मसलों को लेकर जागरूकता तथा अल्पसंख्यक संवेदनशीलता के प्रति सजगता होनी चाहिए। नागरिक शास्त्र को राजनीति विज्ञान के रूप में ढालना चाहिए और बच्चों के अतीत और नागरिक अस्मिता की अवधारणा पर इतिहास के प्रभाव के महत्व को पहचानना चाहिए।

पाठ्यचर्या का यह दस्तावेज चार पाठ्यचर्यी क्षेत्रों की तरफ ध्यान आकर्षित करता है जो इस प्रकार है : काम, कला और पारंपरिक दस्तकारियाँ, स्वास्थ्य तथा शारीरिक शिक्षा एवं शान्ति। काम के संदर्भ में आरंभिक स्तर से शुरु करते हुए काम को अधिगम से जोड़ने के लिए कुछ बुनियादी कदम सुझाए गए हैं। उनके पीछे आधार यह है कि ज्ञान काम को अनुभव में रुपांतरित कर देता है और सहयोग, सृजनात्मकता और आत्म-निर्भरता जैसे मूल्यों की उत्पत्ति करता है। यह ज्ञान और रचनात्मकता के नए रूपों की प्रेरणा भी देता है। वरिष्ठ कक्षाओं में स्कूल के बाहर के संसाधनों को औपचारिक मान्यता देने की सिफारिश है ताकि उन बच्चों को लाभ पहुँच सके जो आजीविका से सीधे जुड़ी हुई शिक्षा का चुनाव करते हैं। स्कूल के बाहर की आजीविका संस्थाओं को औपचारिक मान्यता की जरूरत है जिससे बच्चों को ऐसा स्थान उपलब्ध करवाए जहाँ बच्चे औजारों और दूसरे साधनों से काम करें। दस्तकारियों के मानिचत्रीकरण की सिफारिश की गई है जिससे उन इलाकों की पहचान की जा सके जहाँ बच्चों को स्थानीय कारीगरों के सहारे दस्तकारियों में प्रशिक्षण दिया जा सकता है।

हर स्तर पर विषय के रूप में कला को जगह दिए जाने की सिफारिश की गई जिसमें गायन, नृत्य, दृश्य कलाएँ और नाटक चारों पहलू शामिल हैं। पर यहाँ भी जोर परस्पर-क्रियात्मक पद्धतियों पर होना चाहिए न कि प्रशिक्षण पर। क्योंकि कला शिक्षण का उद्देश्य सौन्दर्यात्मक और वैयक्तिक चेतना को प्रोत्साहित करना है और विविध रूपों में खुद को व्यक्त करने की क्षमता को बढ़ावा देना है। भारतीय पारंपरिक दस्तकारियाँ आर्थिक और सौंदर्यपरक मूल्यों के अर्थ में स्कूली शिक्षा के लिए प्रासंगिक और महत्वपूर्ण हैं, यह तथ्य पहचाना जाना चाहिए।

स्कूलों में बच्चे की कामयाबी उसके पोषण और सुनियोजित शारीरिक गतिविधि के कार्यक्रमों पर निर्भर होती है। इसीलिए जरूरी संसाधनों और स्कूल के समय को मध्याह्न भोजन कार्यक्रम को सुदृढ़ बनाने में लगाना चाहिए। यह सुनिश्चित करने के लिए विशेष प्रयासों की जरूरत होगी कि स्वास्थ्य और शारारिक शिक्षा के कार्यक्रमों में शाला पूर्व अवस्था से लेकर आगे तक लड़कों की तरह ही लड़कियों की ओर भी उतना ही ध्यान दिया जाए।

पूरी दुनिया में बढ़ती असहिष्णुता और मतभेदों को सुलझाने के तरीके के रूप में हिंसा की ओर बढ़ते हुए रूझान को देखते हुए इस बात की सिफारिश की गई है कि शांति को राष्ट्रीय निर्माण की पूर्व शर्त और एक सामाजिक संस्कार के रूप में समग्र मूल्य संरचना के तौर पर स्वीकार किया जाए जिसकी आज अत्यधिक प्रासंगिकता है। एक लोकतांत्रिक और न्यायपूर्ण संस्कृति में बच्चों के समाजीकरण के लिए शान्ति के लिए शिक्षा की संभावनाओं को विभिन्न गतिविधियों के द्वारा हर स्तर पर, और हर विषय में विषयों के विवेकपूर्ण चुनाव के जरिए साकार किया जा सकता है। शान्ति के लिए शिक्षा को शिक्षक प्रशिक्षण पाठ्यचर्या में शामिल करने की सिफारिश की गई है।

स्कूल के माहौल को पाठ्यचर्या के एक पहलू की तरह देखा गया है क्योंकि यह बच्चों को शिक्षा के उद्देश्यों और सीखने की उन युक्तियों के लिए तैयार करती है जो स्कूल में सफलता के लिए जरूरी है। एक संसाधन के रूप में स्कूल के समय को लचीले ढंग से नियोजित किए जाने की जरूरत है। स्थानीय स्तर पर नियोजित लचीले स्कूली

कैलेण्डर और समय सारिणी की सिफारिश की गई है ताकि परियोजना और प्राकृतिक और पारंपरिक धरोहर वाले स्थलों के लिए भ्रमण जैसी विविध प्रकार की गतिविधियों के लिए मौका मिल सके। इस बात की कोशिश करनी होगी कि बच्चों के लिए सीखने के अधिक संसाधन तैयार किये जाएँ, खासकर स्कूल और शिक्षक के लिए संदर्भ पुस्तकालय हेतु स्थानीय भाषाओं में किताबें और संदर्भ सामग्रियाँ उपलब्ध हों और बच्चों की अंतः क्रियात्मक तकनीकी तक पहुँच हो न कि प्रसारित तकनीक तक। यह दस्तावेज माध्यमिक स्तर पर विकल्पों में बहुलता और लचीलेपन के महत्व पर जोर देता है और बच्चों को बंद खाँचों में डाल देने की स्थापित प्रवृत्ति को हतोत्साहित करता है क्योंकि इससे बच्चों के, खास कर ग्रामीण इलाकों के बच्चों के अवसर सीमित हो जाते हैं।

व्यवस्थागत सुधारों के संदर्भ में यह दस्तावेज पंचायती राज व्यवस्था को सुदृढ़ करने पर बल देता है। गुणवत्ता और जवाबदेही बढ़ाने के माध्यम के रूप में सामुदायिक भागीदारी को प्रोत्साहित करने के लिए एक अधिक सुनियोजित रूख अपनाकर यह किया जा सकता है। पर्यावरण से जुड़ी विविध स्कूल-आधारित परियोजनाएँ पंचायती राज संस्थाओं के लिए एक ऐसा ज्ञान भण्डार हो सकती हैं जिसके आधार पर वे स्थानीय पर्यावरण की बेहतर साज-संभाल कर उसे पुनर्जीवित कर सकते हैं। गुणवत्ता के स्तर को ऊपर उठाने के लिए स्कूली स्तर पर अकादमिक नियोजन और नेतृत्व जरूरी है और खण्ड एवं संकुल स्तर पर भूमिकाओं में विभाजन करना बहुत ही आवश्यक है। चट्टोपाध्याय कमीशन (1984) द्वारा सुझाए गए पेशेवर मानकों में ढीलापन लाने की हाल की प्रवृत्ति को रोकने के लिए शिक्षक-प्रशिक्षण में क्रान्तिकारी परिवर्तन की जरूरत है। सेवापूर्ण प्रशिक्षण कार्यक्रमों को ज्यादा लंबी अवधि का तथा अधिक समग्रता लिए हुए होना चाहिए ताकि बच्चों का ध्यानपूर्वक अवलोकन करने के लिए पर्याप्त अवसर और स्कूलों में इंटर्नशिप के द्वारा शिक्षाशास्त्रीय सिद्धान्तों को व्यवहार से जोड़ने के पूरे मौके मिल सकें।

पाठ्यचर्या को नवीकृत करने के लिए सबसे ज़रुरी व्यवस्थागत कदम होगा परीक्षाओं में सुधार जिससे खासकर दसवीं और बारहवीं कक्षा में बच्चों और उनके माता-पिता पर बढ़ते मनोवैज्ञानिक दबाव की गहराती समस्याओं का कोई समाधान निकाला जा सके। इसके लिए जो विशेष कदम उठाने जरूरी हैं वे हैं प्रश्न पत्र के स्वरूप का पूरा परिवर्तन, जिससे तर्कशक्ति और रचनात्मक क्षमताओं को आकलन का आधार बनाया जाए न कि रटने की क्षमता को। साथ ही पारदर्शिता और आंतरिक आकलन को बढ़ावा देते हुए परीक्षाओं को कक्षा की गतिविधियों से भी जोड़ने की जरूरत है। आज प्रचलित पास और फेल की सामान्यीकृत श्रेणियों की कमी को दूर करने के लिए जरूरी होगा कि ऐसी युक्तियाँ खोजी जाएँ जो बच्चों को अलग-अलग स्तर की उपलब्धियों का विकल्प लेने को प्रेरित कर सकें। बोर्ड-पूर्व परीक्षाओं पर अतिरिक्त ज़ोर को भी हतोत्साहित किए जाने की जरूरत है।

अन्ततः यह दस्तावेज स्कूली व्यवस्था और दूसरे नागरिक समूहों के बीच सहभागिता की सिफारिश करता है जिनमें गैर-सरकारी संगठन और शिक्षक संगठन भी शामिल है। पहले से ही मौजूद नवाचारों के अनुभवों को मुख्य धारा का स्वरूप देने की जरूरत है। आज जरूरत इस बात की है कि आरंभिक शिक्षा के सर्वव्यापीकरण में निहित चुनौतियों के प्रति सजगता को राज्य और बच्चों को लेकर काम कर रही सारी एजेंसियों के बीच एक व्यापक सहभागिता का विषय बनाया जाए और पहले से मौजूद नवाचारों के अनुभवों को मुख्यधारा में लाया जाए।

गणित शिक्षण के उद्देश्य

मानव सभ्यता के विकास में प्रारम्भ से ही गणित का विशिष्ट स्थान रहा है। गणित हमारे व्यावहारिक जीवन का अंग है। समाज से सीधा जुड़ा होने के कारण समाज की बदलती आवश्यकताओं और अपेक्षाओं के परिप्रेक्ष्य में गणित के पाठ्यक्रम में संशोधन और परिवर्धन होते रहे हैं।

यह सर्वस्वीकार्य तथ्य है कि ज्ञान विज्ञान के समस्त विषयों में किसी न किसी रूप में गणित समावेशित है। गणित को व्यापार का प्राण, विज्ञान का जन्मदाता कहा गया है। सभी शिक्षाविद्‌ तथा विभिन्न शिक्षा आयोगों ने इसके महत्व को स्वीकार कर अपनी संस्तुतियों में प्राथमिक और माध्यमिक स्तर पर गणित शिक्षण को विशेष महत्व देने के लिए ध्यान आकर्षित किया है।

इसी कारण राष्ट्रीय शिक्षा नीति 1986 में गणित के पाठ्यक्रम का आधुनिकीकरण करने का निश्चय किया गया। इसी परिप्रेक्ष्य में कक्षा 9 और 10 में गणित के नवीन पाठ्यक्रम में अपेक्षित संशोधन एवं परिवर्द्धन किये गये हैं।

इस स्तर पर बच्चों की कल्पना शक्ति का विकास होने लगता है। उनमें दैनिक जीवन के प्रत्येक रहस्य को समझने एवं जानने की इच्छा प्रबल होती है, बच्चे ज्ञान और चिंतन के साथ विषय को गहनता से समझने में रूचि लेने लगते हैं। इन सभी बिन्दुओं को दृष्टिगत रखते हुए गणित के पाठ्यक्रम के उद्देश्य निम्नवत निश्चित किये गये हैं-

- ★ गणित की संरचना को तर्कों के संकेतन और उत्पत्ति के माध्यम से समझना।
- ★ गणित की अपनी विभिन्न विशेषताओं जैसे कि सावधानीपूर्वक परिभाषित पद और तथ्य उन्हें प्रस्तुत करने के लिए प्रतीकों का उपयोग, संक्षिप्त रूप से कहे साध्य जिसमें केवल पहले परिभाषित पदों का उपयोग हो, साध्य को सत्यापित करने वाली उपपत्तियाँ के साथ संप्रेषित करना।
- ★ तर्क के माध्यम से, पहले सत्यापित किए गए साध्य के आधार पर, जिनसे किसी प्रमेय को सिद्ध किया जाता है, उनके अनुप्रयोगों से गणितीय ढाँचा का विकास करना।
- ★ बीजगणितीय संरचनाओं को ज्यामितीय रूप में दृश्यीकृत करने की क्षमता का विकास करना।
- ★ विभिन्न विषय क्षेत्र जैसे कि बीजगणित और त्रिकोणमितीय ज्यामिति और क्षेत्रमिति, गणित और भौतिक विज्ञान, गणित और सामाजिक विज्ञान में सुस्पष्ट सम्बन्ध को समझने की क्षमता का विकास करना।
- ★ दैनिक जीवन की विभिन्न समस्याओं का अध्ययन पूर्ण समाधान ढूढ़ने के अवसर प्रदान करना, जिससे शिक्षार्थियों को दैनिक आवश्यकताओं की पूर्ति हेतु गणितीय तथ्यों, अवधारणाओं और सिद्धान्तों की जानकारी और सम्बोध हो सके।

★ ज्यामितीय और बीजगणितीय अवधारणा को क्रिया कलापों, प्रयोगों और सत्यापनों द्वारा जानकारी एवं संबोध अर्जित करना।

★ सांख्यिकीय लेखा चित्र को देखकर उनसे अपेक्षित आँकड़ों को पृथक करना, उनकी व्याख्या करना और निष्कर्ष प्राप्त करने की दक्षता विकसित करना।

★ राष्ट्रीय एकता, पर्यावरण संरक्षण, लिंगभेद और सामाजिक विषमताओं को समाप्त करने के लिए जागरूकता विकसित करना।

★ विश्व में गणित के विकास में, विशेषतः भारतीय गणितज्ञों के महान योगदान की जानकारी तथा सराहना करना।

माध्यमिक स्तर पर गणित के पाठ्यक्रम के उद्देश्य

जीवन कौशल और जीविका से स्कूली शिक्षा के संबंध के बारे में बहुत कुछ लिखा गया है। यह निश्चित रूप से सच है कि प्राथमिक स्तर पर पढ़ाए गए कई कौशल दैनिक जीवन में उपयोगी होते हैं। तथापि पीछे बताए गए उच्च लक्ष्यों पर विचार करते हुए पाठ्यचर्या के पुनः उन्मुखीकरण से बच्चों द्वारा स्कूली समय का बेहतर उपयोग होगा, इस रूप में कि यह बच्चों में समस्या समाधान और विश्लेषण कौशल निर्मित करेगा तथा उन्हें जीवन में आने वाली विभिन्न प्रकार की समस्याओं को बेहतर तरीके से हल करने के लिए तैयार करेगी।

पाठ्यचर्या की रूपरेखा में गणित शिक्षा के स्थान के बारे में हमारा चिंतन इन जुड़वाँ सरोकारों पर आधारित हैं : एक, प्रत्येक छात्र के मस्तिष्क को व्यस्त रखने के लिए गणित शिक्षा क्या कर सकती है और दूसरा कि यह उसकी आंतरिक शक्तियों को किस प्रकार मजबूत कर सकती है। स्कूल में हम गणित शिक्षा के प्रति अपना दृष्टिकोण समझाते हैं, विचारणीय मुख्य क्षेत्रों को वर्णित करने का प्रयास करते हैं और इन जुड़वाँ परिप्रेक्ष्यों पर आधारित सरोकारों को संबांधित करने हेतु सिफ़ारिशें करते हैं।

हमारे बहुत से विचार एन.सी.टी.एम. संयुक्त राज्य अमेरिका, द न्यूजर्सी मैथेमैटिक्स कॉएलिशन, केलिफोर्निया स्टेट बोर्ड ऑफ एजुकेशन, के गणित शैक्षिक विषयवस्तु मानक, सिंगापुर गणित पाठ्यचर्या, दि मैथेमैटिक्स लर्निंग एरिया स्टेटमेंट्स ऑफ़ आस्ट्रेलिया एंड न्यूजीलैंड, और नेशनल करीकुला ऑफ़ फ्रांस हंगरी और यूनाइटेड किंगडम में गणित पाठ्यचर्या पर चर्चाओं से निर्मित हुए हैं। फेरीनि-मुंडे तथा उनके सहयोगियों ने फ्रांस के गणित की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या और शिक्षण क्रियाओं की ब्राजील, मिस्र, जापान,केन्या, स्वीडन और यू.एस.ए. से तुलना कर एक रुचिपूर्ण चर्चा प्रस्तुत की।

2. एक दृष्टि कथन

हमारी दृष्टि में स्कूली गणित उन परिस्थितियों में होता है, जहाँ :

- बच्चे गणित में आनंद लेना सीखें : यह एक महत्वपूर्ण लक्ष्य है जो कि इस आधार वाक्य पर आधारित है कि गणित का जीवन भर उपयोग और आनंद लिया जा सकता है, और इसलिए इस प्रकार का स्वाद पैदा करने के लिए स्कूल उचित जगह है। दूसरी तरफ गणित के प्रति भय उत्पन्न करना (या इसे दूर न करना) बच्चों को जीवन की एक अहम और जरूरी योग्यता से वंचित कर सकता है।
- बच्चे महत्वपूर्ण गणित सीखें : गणित को सूत्रों और यांत्रिक क्रियाओं तक सीमित रखना बहुत नुकसान पहुँचाता है। किसी गणितीय तकनीक का कहाँ तथा कैसे उपयोग करना है, इस चीज को समझना ज्यादा

महत्वपूर्ण है न कि उस तकनीक को याद रखना (जो कि किसी पुस्तक का उपयोग करके आसानी से किया जा सकता है)। स्कूल को ऐसी समझ पैदा करने की जरूरत है।

* बच्चे गणित को इस रूप में देखें कि इसके बारे में वे बात करें, संप्रेषण करें, आपस में चर्चा करें, और उस पर मिलकर कार्य करें। गणित को बच्चे के जीवनानुभवों का एक अंश बनाना सबसे अच्छी गणित शिक्षा है।
* बच्चे अर्थपूर्ण गणितीय समस्याएँ प्रस्तुत तथा हल करें : स्कूल में गणित ऐसा क्षेत्र है जो औपचारिक रूप से सवाल हल करने की कुशलता पर केन्द्रित है। यदि इसे किसी के जीवन में उपयोग में आने वाली एक योग्यता के रूप में समझें तो स्कूल में सीखी गई तकनीक और विधियों का महत्व बढ़ जाता है। गणित रुचिपूर्ण समस्याएँ बनाने का भी अवसर देता है और नए संवाद निर्मित करता है।
* बच्चे संबंधों को समझने में, संरचना को देखने, वस्तुओं के बारे में तर्क करने में, कथनों की सत्यता या असत्यता पर तर्क करने में, अमूर्तनों का प्रयोग करें। तार्किक चिंतन महान उपहार है जो गणित हमें प्रदान कर सकता है, और इस प्रकार के विचार और संप्रेषण की आदतें बच्चों में विकसित करना गणित शिक्षा का मुख्य उद्देश्य है।
* बच्चे गणित की मूल संरचना को समझें : अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति और त्रिकोणमिति जो कि स्कूली गणित के मुख्य क्षेत्र हैं सभी अमूर्तीकरण, संरचना-निर्माण और सामान्यीकरण की क्रियाविधि प्रदान करते हैं। गणित के क्षेत्र और शक्ति के महत्व की समझ हमारी प्रवृत्तियों को अद्वितीय रूप से निखारेगी।
* शिक्षक कक्षा में हर छात्र की शैक्षिक गतिविधियों से जुड़ाव की अपेक्षा रखे : इससे कम पर समझौता करने का मतलब होता है कि वह भविष्य में विद्यार्थियों को व्यवस्थित विलगाव की ओर ले जाएगा। मेधावी बच्चों को उनके स्तर के अनुकूल चुनौतियाँ प्रदान करते हुए सभी बच्चों की सहभागिता सुनिश्चित करना खुद में एक चुनौती है। अध्यापकों को साधन और संसाधनों को प्रदान करना शिक्षण तंत्र की सेहत के लिए आवश्यक है।
* यह दृष्टि (विज़न) हमारे देश में स्कूली शिक्षा को प्रभावित करने वाली केन्द्रीय समस्याओं के निदान पर आधारित है। यह सारी इस सोच पर आधारित है कि क्या किया जा सकता है, तथा क्या किया जाना चाहिए।
* उपर्युक्त दृष्टिकथन के आलोक में माध्यमिक स्तर पर गणित के पाठ्यक्रम के उद्देश्य निम्नवत् संकल्पित किये गये हैं :
* दैनिक जीवन की विभिन्न समस्याओं का अध्ययन करने के लिए पूर्ण समाधान ढूँढ़ने के अवसर प्रदान करना, जिससे शिक्षार्थियों को दैनिक आवश्यकताओं की पूर्ति हेतु गणितीय तथ्यों, अवधारणाओं और सिद्धान्तों की जानकारी और संबोध हो सके।
* गणित की संरचना को तर्कों के संकेतन और उपपत्ति के माध्यम से समझना।

* गणित की अपनी विभिन्न विशेषताओं जैसे कि परिभाषित पद और तथ्य, उन्हें प्रस्तुत करने के लिए प्रतीकों का उपयोग, संक्षिप्त रूप से साध्य-कथन जिसमें पहले केवल परिभाषित पदों का उपयोग हो, और पुनः साध्य को सत्यापित करने वाली उपपत्तियों के साथ उसे संप्रेषित करना।
* तर्क के माध्यम से, पहले सत्यापित किये गये साक्ष्य के आधार पर, जिनसे किसी प्रमेय को सिद्ध किया जाता है, उनके अनुप्रयोगों से गणितीय ढाँचा का विकास करना।
* बीजगणितीय संरचनाओं को ज्यामितीय रूप से दृश्यीकृत करने की क्षमता का विकास करना।
* विभिन्न विषयक्षेत्र जैसे कि बीजगणित और त्रिकोणमिति, ज्यामिति और क्षेत्रमिति, गणित और भौतिक विज्ञान, गणित और सामाजिक विज्ञान में सुस्पष्ट सम्बन्ध को समझने की क्षमता का विकास करना।
* सांख्यिकीय लेखा चित्र को देखकर उनसे अपेक्षित आँकड़ों को पृथक करना, उनकी व्याख्या करना और निष्कर्ष प्राप्त करने की दक्षता विकसित करना।
* राष्ट्रीय एकता, पर्यावरण संरक्षण, लिंगभेद और सामाजिक विषमताओं को समाप्त करने के लिए जागरूकता विकसित करना।
* विश्व में गणित के विकास में विशेषतः भारतीय गणितज्ञों के महान योगदान की जानकारी तथा सराहना करना।

गणित शिक्षक संदर्शिका - विशेषताएँ

* कक्षा 9 एवं कक्षा 10 के पाठ्यक्रमों पर आधारित गणित की शिक्षक संदर्शिका समेकित रूप में निर्मित की गयी है जिसके दो भाग हैं - 1. प्रथम भाग (कक्षा 9) तथा द्वितीय भाग (कक्षा 10)।
* पाठ्यपुस्तकों में दी गयी सामग्री की पुनरावृत्ति नहीं की गयी है, बल्कि उनका सशक्तीकरण करते हुए गणित-अध्यापकों के लिए कुछ नयी ज्ञान-ऊर्जा का सृजन करने का प्रयास किया गया है जिससे विषय-वस्तु का संप्रेषण करने में वे और अधिक सहजता अनुभव कर सकें।
* पाठ्यपुस्तकों में उनकी अपनी सीमाओं के कारण बीच-बीच में जो कड़ियाँ टूटी है जैसी प्रतीत होती हैं, उन्हें जोड़ने का प्रयास किया गया है ताकि शिक्षक विषय-वस्तु को आत्मसात करने में शिक्षार्थियों की पूरी सहायता कर सकें।
* शिक्षक संदर्शिका के प्रत्येक अध्याय के प्रारम्भ में उसके शिक्षण-उद्देश्यों का उल्लेख कर दिया गया है। पाठ्यक्रम के विषय-वस्तु के कठिन संबोधों की पहचान कर उसे शिक्षण-बिन्दु के अन्तर्गत चयनित किया गया है। प्रस्तुतीकरण के अन्तर्गत इन्हीं शिक्षण-बिन्दुओं का समावेश करते हुए इन्हें सुस्पष्ट, बोधगम्य, सुरूचिपूर्ण एवं सरल बनाने का प्रयास किया गया है।
* प्रत्येक अध्याय के अन्त में मूल्यांकन के अन्तर्गत कुछ नवीन प्रश्नों का भी समावेश किया गया है जिसे हल करने में शिक्षार्थियों का मार्गदर्शन / सहायता करने की गणित शिक्षकों से अपेक्षा है।
* विषयवस्तु को बोधगम्य, सरल एवं सुरुचिपूर्ण बनाने के लिए कुछ वैकल्पिक क्रिया-विधियों, उदाहरणों का भी समावेश किया गया है।
* सन्दर्शिका में पाठ्यक्रम के नये संशोधित एवं परिवर्धित स्वरूप को महत्व प्रदान करते हुए ''प्रोजेक्ट कार्य'' के भी कुछ माड्यूल्स का समावेश किया गया है।
* सन्दर्शिका की भाषा असंदिग्ध, सरल एवं सुस्पष्ट रखने का हर संभव प्रयास किया गया है जिसके कारण विषय-वस्तु को गहराई से समझाने में किसी कठिनाई का अनुभव न हो।

गणित शिक्षक संदर्शिका की आवश्यकता

नवीन पाठ्यक्रम के परिप्रेक्ष्य में नवीन पाठ्यपुस्तकों का सृजन किया गया है। पाठ्यपुस्तकों का उपयोग किस प्रकार किया जाय कि बच्चों में विषय-वस्तु की स्पष्ट समझ बन सके। शिक्षण-विधा को सशक्त एवं प्रभावी बनाने के लिए जिस प्रकार समय-समय पर शिक्षकों के सेवारत प्रशिक्षण की गंभीर आवश्यकता होती है, वैसे ही शिक्षक-सन्दर्शिका भी विषयाध्यापक के हाथ में एक कारगर शिक्षण-टूल्स है, जो उसे विषय-वस्तु को शिक्षार्थियों तक सम्प्रेषित करने में सम्बल प्रदान करता है। पाठ्यपुस्तक में पाठ्यक्रम के यत्र-तत्र विशृंखलित कड़ियों को जोड़कर सम्यक ज्ञान-प्रेषण में शिक्षक संदर्शिका-शिक्षकों का मार्गदर्शन करने में सहायक हो, शिक्षक संदर्शिका की रचना की मूलभूत आवश्यकता यही होती है। संक्षेप में, शिक्षक सन्दर्शिका की आवश्यक के कुछ प्रमुख बिन्दु निम्नवत् हैं -

- पाठ्यपुस्तक में कुछ ऐसे स्थल हो सकते हैं जहाँ शिक्षण की दृष्टि से या शिक्षार्थी के अधिगम की दृष्टि से कठिनाई हो। शिक्षक संदर्शिका का इसके निराकरण में सहायक सिद्ध हो सकती है।
- शिक्षक के ज्ञान-संवर्धन, ज्ञान को अद्यतन बनाने में सहायक हो सकती है।
- विषय-वस्तु के प्रभावी-सम्प्रेषण में मार्ग-दर्शिका बन सकती है।
- कतिपय संबोधों के प्रस्तुतीकरण की नयी दिशा / विधा प्रदान करने में सहायिका बन सकती है।
- शिक्षक को विषय-वस्तु संप्रेषण में नयी ऊर्जा प्रदान कर सकती है।

कक्षा शिक्षण से पूर्व की तैयारी

गणित विषय कई प्रकार से विशिष्ट है। इसका विस्तार दैनिक के जीवन से लेकर दर्शन और ज्योतिष तक है। यह इसलिए भी विशिष्ट है क्योंकि इसके प्रति लोगों का दृष्टिकोण भी विशिष्ट होता है- डराने वाला, उबाने वाला, जूझने वाला, सब कुछ भुला देने वाला, आनन्दानुभूति कराने वाला- और भी जाने कितने तरह की अनुभूति जगाने वाला विषय है गणित।

ऐसे विशिष्ट विषय का शिक्षण कार्य भी विशिष्टता से युक्त होना ही चाहिए। किन्तु पहले यह आवश्यक होगा कि हम यह तय करें कि बच्चों के लिए हम गणित विषय को किस रूप में रखना चाहेंगे ? डराने वाला या जूझने वाला या फिर आनन्दानुभूति कराने वाला?

एक सक्षम और कुशल शिक्षक निश्चय ही बच्चों में विषय के प्रति जिज्ञासा तथा लगाव उत्पन्न करना चाहेंगे। गणित जैसे विषय के लिए, जिसके बारे में अनेक प्रकार की भ्रान्तियाँ प्रचलन में आ चुकी हैं, यह कार्य और भी महत्वपूर्ण हो जाता है। कुछ भ्रान्तियों ने तो पूरे शैक्षिक सोच को ही प्रभावित कर रखा है जैसे गणित में लड़कियाँ कमजोर ही होती हैं, गणित एक अतिगम्भीर तथा कठिन विषय है या गणित में अच्छे अंक प्राप्त कर पाना मुश्किल है,आदि।

गाणित विषय के शिक्षण से पूर्व ऐसी गलत धारणाओं से उबरना जरूरी है। तभी हम गणित विषय के शिक्षण के साथ और कोमल मनोभवों के साथ अपेक्षित न्याय कर सकेंगे।

उपर्युक्त मानसिक पृष्ठभूमि में गणित विषय के कक्षा शिक्षण की पूर्व तैयारी किस प्रकार की जाय? आइये, इस पर विचार किया जाय।

पूर्व तैयारी के दो भाग हो सकते हैं-

(क) सामान्य तैयारी (ख) विशिष्ट पाठ सम्बन्धी तैयारी

(क) सामान्य तैयारी का अर्थ है कि गणित शिक्षण सम्बन्धी प्रत्येक कालांश में सामान्य रूप से लागू किए जाने योग्य बातों का अवश्य और हमेशा ध्यान रखा जाए। ये बातें निम्नवत् हैं-

- श्यामपट्ट का अधिक तथा समुचित प्रयोग करें।
- श्यामपट्ट पर क्रमबद्ध तथा स्वच्छ लेखन करें।
- कक्षा में बच्चों की अधिकतम सहभागिता अवश्य प्राप्त करें।
- एकल तथा सामूहिक अभ्यास कार्य के पर्याप्त अवसर दें।

* कक्षा शिक्षण की क्रिया का आधार कक्षा के अधिकांश बच्चों का मानसिक स्तर हो, न कि कुछ चुने हुए बुद्धिमान बच्चों का ही।
* कक्षा का माहौल सदैव हल्का रहे, बच्चे अपने को तनाव रहित समझें।
* पाठ सम्बन्धी सहायक सामग्री का निर्माण शिक्षक तथा बच्चे, दोनों ही करें।
* अमूर्त गणितीय अवधारणाओं के लिए गतिविधियों का सहयोग लेना ठीक रहता है। घातांक, परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएं तथा समुच्चय जैसे सम्बोधों के शिक्षण के दौरान गतिविधियाँ सहायक हो सकती हैं।
* प्रश्नोत्तर के दौरान सही उत्तर पर बच्चों को शाबासी जरूर दें किन्तु गलत उत्तर प्राप्त होने पर संयत भाव से बच्चों को पुनः प्रयास करने को कहें।
* शिक्षण की गति बच्चों के सीखने की गति के अनुकूल हो।

उपर्युक्त सूची में आप अपने अनुभव से कुछ नई और प्रभावी बातें जोड़ सकते हैं।

(ख) विशिष्ट पाठ सम्बन्धी तैयारी का अर्थ है कि गणित सम्बोध का अध्यापन एक कालांश में किया जाना है उसे ध्यान में रखते हुए विशिष्ट तैयारी कर ली जाय। यह तैयारी शिक्षण पूर्व सम्बोध का गहन अध्ययन, गतिविधि सहायक (सामग्री) निर्माण, अभ्यास कार्य का स्वरूप आदि तय करने की ही हो सकती है।

कक्षा शिक्षण की तैयारी के चरण

1. उद्देश्य -

किसी पाठ के पढ़ाने वाले अंश के सामान्य एवं विशिष्ट उद्देश्य सुस्पष्ट होने चाहिए।

2. शिक्षण अधिगम सामग्री, गतिविधि तथा कक्षागत क्रियाकलाप का निर्धारण (मान लीजिए कि 'समुच्चय' का पाठ पढ़ाना है।)

समुच्चय के शिक्षण से पूर्व यह तय कर लेना है कि पाठ-सम्बन्धी शिक्षण अधिगम सामग्री क्या होगी? इस पाठ हेतु फर्श पर वृत्त बनाकर उसमें एक जैसी चीजों के समूह रखे जा सकते हैं जैसे भिन्न रंगीन कपड़ों के टुकड़े, धातुएँ, फल या अनाज के दाने, प्लास्टिक की भिन्न आकार की कई वस्तुएँ काँच की वस्तुएँ आदि। इस सामग्री का संग्रह पाठ पढ़ाने से पूर्व शिक्षक स्वयं या बच्चों द्वारा करा सकता है।

इसी प्रकार विद्यालय के प्रांगण में बड़े वृत्त बनाकर उनमें लड़के तथा लड़कियों के अलग-अलग समूह खड़ा करके, एक अक्षर से आरम्भ नाम के बच्चों को इकट्ठा खड़ा करके, हाफ पैण्ट तथा फुल पैण्ट पहने हुए बच्चों के समूह को पृथक खड़ा करके समुच्चय का सम्बोध स्पष्ट किया जा सकता है। 'समुच्चय' की संकल्पना स्पष्ट करने के लिए श्याम पट्ट पर वृत्त, या आयत में समान प्रकार के सदस्यों जैसे चौपाये, जानवरों, वर्णमाला के अक्षरों, सम- विषम संख्याओं, उड़ने वाले जीवों आदि का नाम स्वयं तथा बच्चों से भी लिखवाया जा सकता है। आवश्यकतानुसार प्रश्नों द्वारा बच्चों की समझ की जांच भी की जानी चाहिए।

3. पाठ की व्याख्या प्रस्तुति -

उपर्युक्त उपायों द्वारा जब बच्चों में समुच्चय की समझ विकसित कर ली जाय तो समुच्चय सम्बन्धी संकल्पना को कक्षा में शाब्दिक रूप में तथा श्यामपट्ट लेखन द्वारा प्रस्तुत किया जाना चाहिए। बच्चे इसे अपनी अभ्यास पुस्तिका पर नोट करते रहें। शिक्षण करते समय श्यामपट्ट पर ऐसे उदाहरण भी अंकित किए जाए जो समुच्चय के होने तथा न होने को भी स्पष्ट करें जैसे चौपायों के समूह में एक फूल होने से या फूलों के समूह में एक चम्मच होने से 'समुच्चय न होने' की बात स्पष्ट की जा सकती है। यह भी स्पष्ट किया जाए कि फूलों के साथ चम्मच न हों या चौपाइयों के साथ फूल न हो तो ये समूह समुच्चय बन जायेंगे।

इसी प्रकार समुच्चय के अवयव या सदस्य क्या होते हैं, संकेतन क्या है, समुच्चय का नामकरण कैसे होता है आदि को भी स्पष्ट किया जाना चाहिए।

4. पुनरावृत्ति के प्रश्न तथा कक्षा कार्य

- पाठ पढ़ाये जाने के उपरान्त भिन्न उदाहरणों, गतिविधियों तथा प्रश्नों द्वारा बच्चों द्वारा अर्जित सम्बोध की पुनरावृत्ति कराई जाय तथा उन्हें भी श्यामपट्ट अथवा अपनी अभ्यास पुस्तिका का प्रयोग करने का मौका देकर अपने ज्ञान को जांचने दिया जाय।

5. गृहकार्य

- कक्षा शिक्षण के उपरान्त उन्हें गृहकार्य दिया जाय जिसमें रसोईघर, खेल, बगीचे, बस्ते, कपड़े रखने का बक्सा बटुए या पर्स में रखे सिक्कों आदि के समुच्चय होने अथवा न होने सम्बन्धी प्रश्नों के उत्तर लिखकर लाने को कहा जाए।

6. अन्त में अगले पाठ में क्या सीखना है, क्या करना है, क्या तैयारी करनी है, क्या सामग्री जुटानी या बनानी है, यह अवश्य बता दिया जाय। इससे बच्चों की जिज्ञासा अगले दिन तक बनी रहेगी।

इस प्रकार यदि हम आरम्भ से ही कक्षा शिक्षण से पहले उसकी तैयारी का अभ्यास डालें तो कुछ ही महीने या सप्ताह के बाद यह काम सहज हो जाएगा और गणित शिक्षण स्वयं छात्र/छात्राओं के लिए रोचक भी बन जायेगा।

गणित शिक्षण लीक से हटकर

- गणित का शिक्षण अन्य विषयों के शिक्षण से पहले भी हटकर अलग रहा है। जाँच अपरिहार्य है।
- परम्परागत शिक्षण शिक्षक- केन्द्रित है। अब इसे बाल केन्द्रित करना अत्यावश्यक है।
- पहले रटने पर जोर दिया जाता रहा है। अब अधिगम अधिक महत्वपूर्ण है।
- पहले तथ्य को सीधे बताया जाता था। अब इसे तर्क से समझते हुए निष्कर्ष निकालना शिक्षार्थी को स्वयं अनुभव कराना है।
- पहले कुछ *Thumb Rule* बताये जाते थे। इनसे कभी-कभी भ्रांतियाँ भी उत्पन्न होती रही हैं। उदाहरण के लिए 'छोटी से छोटी' या 'कम से कम' देखते ही ल0स0 तथा 'बड़ी से बड़ी' या 'अधिक से अधिक' देखते ही म0स0 ज्ञात कर लेने का ट्रिक बताया जाता है। इससे बचना चाहिए।
- यदि अमूर्त शिक्षण में कठिनाई अनुभव हो तो मूर्त वस्तुओं का सहारा गणित शिक्षण का एक अंग है।

If You tell me, I forget it.

If You teach me, I may remember.

If You involve me, I learn it.

- यह उक्ति भी यही कहती है कि शिक्षण के स्थान पर शिक्षार्थियों की सहभागिता अधिक फलदायी होगी।
- गणित शिक्षक के लिए *Walk, Talk, Chalk* का बहुत महत्व है। अतः शिक्षक को सदैव सक्रिय रहना चाहिए तथा अपने विद्यार्थियों को सक्रिय रखना चाहिए। उनकी कठिनाइयों के निवारण के लिए उत्सुक होना चाहिए और शिक्षण सामग्री का भी उपयोग करते रहना चाहिए। कक्षा को नीरस न होने देने के प्रति जागरूक रहना चाहिए।
- शिक्षक के प्रति शिक्षार्थी में विश्वास एवं श्रद्धा का आविर्भाव उत्पन्न करना अत्यावश्यक है।
- गणित शिक्षक को पथ प्रदर्शक एवं सलाहकार की भूमिका की भी अधिक आवश्यकता है। जो भी उदाहरण लिए जायें वे दैनिक जीवन से मेल खाते हुए होना चाहिए।
- गणित सीखने का उद्देश्य यह भी होना चाहिए कि इससे व्यवहार में सकारात्मक परिवर्तन आये और हमारे नैतिक मूल्यों का विकास हो।
- गणित अनुशासन और सत्यान्वेषण की प्रेरणा देती है। इससे शुद्धता एवं शीघ्रता जैसे गुणों का विकास होता है।

➢ गणित को व्यापार का प्राण तथा विज्ञान का जन्मदाता कहा जाता है। गणित का गणितज्ञ, इन्जीनियर आदि के व्यवसाय से सीधा सम्बन्ध होता है। इन व्यवसायों में प्रवेश तथा सफलता तभी सम्भव है जब गणित का अध्ययन किया जाय। इसके अतिरिक्त अन्य व्यवसायों जैसे मशीनों का प्रयोग, भवन निर्माण, दैनिक वस्तुओं की खरीद आदि में भी गणित का सामान्य ज्ञान आवश्यक होता है। इस प्रकार आधुनिक युग में सभ्यता की नींव गणित पर आधारित है।

गणित से जुड़े जीवन-कौशल

शिक्षा जीने की कला सिखाती है। सफल और संतुष्ट जीवन के लिए कुछ आधारभूत जीवन कौशलों का ज्ञान तथा विकास होना जरूरी है। ये जीवन कौशल निम्नवत् है -

1. निर्णय लेने की क्षमता (*Decision Making*)
2. समस्या समाधान (*Problem Solving*)
3. सकारात्मक सोच (*Positive Thinking*)
4. आलोचनात्मक सोच (*Critical Thinking*)
5. प्रभावी सम्प्रेषण (*Effective Communication*)
6. पारस्परिक अन्तर्सम्बन्ध (*Interpersonal Relationship*)
7. जागरूकता (*Awareness*)
8. समभाव (*Empathy*)
9. तनाव पर नियंत्रण (*Stress Control*)
10. भावुकता पर नियंत्रक (*Emotional Control*)

वैसे तो सामान्य अथवा समग्र शिक्षा इन कौशलों का विकास करती है किन्तु यदि हर एक विषय में ढूँढ़े तो भी ये दस कौशल विकसित करने वाले तत्व अवश्य ही दिखाई दे जायेगा।

आइए देखें कि गणित विषय में ये जीवन कौशल किस रूप और विस्तार में विद्यमान हैं -

उपर्युक्त दस जीवन कौशलों में से समस्या समाधानता तथा निर्णय लेने की क्षमता का सीधा सम्बन्ध गणित विषय में विस्तार क्षेत्र से है। सम्बोधों का ज्ञान हो जाने पर गणितीय समस्याओं का समाधान ढूँढ़ा जाता है। प्राप्त परिणाम के आधार पर सत्य और असत्य, नित्य अथवा सतत अथवा असतत का निर्णय लिया जाता है। इसी प्रकार जागरूकता तथा समभाव का भी गणितीय संक्रियाओं में स्थान है। गणित का अध्ययन हमें समग्ररूप से जागरूक बनाता है तो एक ऐसी अन्तर्दृष्टि का विकास भी करता है, जो हमें विभिन्न स्थितियों में, विभिन्न व्यक्तियों और घटनाओं में स्वयं अपने जुड़े होने का अहसास भी देता है। इस प्रकार हम दूसरों के प्रति समभाव की स्थिति में आ जाते हैं।

गणित विषय एकाग्रता विश्लेषण, वस्तुपरकता, अन्वेषण क्षमता, मननशीलताद्ध सृजनशीलता आदि का विकास करता है। ये सभी उच्च कोटि के मानवीय गुण हैं जो प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष दोनों ही तरह से सकारात्मक

सोच, आलोचनात्मक सोच, तनाव पर नियंत्रण जैसे जीवन कौशल को उभारते हैं। तार्किकता के आधार पर सही व गलत का निर्धारण कर पाने से हम तथ्यों पर विश्वास करना और उन्हें स्वीकार करना सीख लेते हैं। इस प्रकार हम भावुकता के स्थान पर वस्तुस्थिति के अनुरूप सामंजस्य स्थापित करना उचित मानने लगते हैं।

गणित की उच्चस्थ स्थिति पर पहुँचकर अनेक विषयों का एकीकरण होता दिखाई देता है, अर्थात भौतिकी, दर्शन, तर्कशास्त्र, खगोलशास्त्र और ज्योतिष शास्त्र गणित के ही विस्तारित रूप प्रतीत होते हैं। गणित की आरंभिक स्थिति में भी समाजशास्त्र, अर्थशास्त्र, विज्ञान, लोकव्यवहार, दैनिक जीवन की आम तथा खास बातें इससे निरन्तर जुड़ी रहती हैं। इस प्रकार गणित हमें निरन्तर पारस्परिक अन्तर्सम्बन्ध तथा इसके महत्व का बोध कराता रहता है।

अतः हम गणित विषय के अध्ययन और विभिन्न जीवन कौशलों के विकास के गहन सम्बन्ध का सहज अनुमान लगा सकते हैं और अपने शिक्षण कार्य में इन्हें अधिक से अधिक उभारते रहने का प्रयास कर सकते हैं।

उपर्युक्त जीवन कौशलों के विकसित होने के प्रमाण के रूप में हमें निम्न तथ्यों पर भी ध्यान देना आवश्यक है -

1. गणित विषय का अध्ययन व्यक्ति को क्रमबद्ध कार्य प्रणाली सिखाता है।
2. अनुमान से आरंभ होकर तर्क और परीक्षण के रास्ते निष्कर्ष तक पहुँचा जाता है।
3. चिन्तन, मनन, एकाग्रता, समस्या से जूझना, तथ्यों की खोज करना, परिणाम तक पहुँचने की चाहत पैदा होना, सफलता मिलने पर आत्मविश्वास में वृद्धि, असफल होने की दशा में दुबारा प्रयासरत होना, समस्या सुलझाने की धुन में रहना सभी विशिष्ट गुण गणित अध्ययन से विकसित होते हैं।
4. अमूर्त तथा अप्रत्यक्ष स्थितियों से प्रत्यक्षीकरण तथा सामान्यीकरण होता है।
5. नियमों तथा सिद्धान्तों से साक्षात्कार होते रहने से व्यापक दृष्टिकोण विकसित होता है, स्वस्थ और वस्तुस्थितिपरक विषय बनते हैं।
6. विचारों में क्रमबद्धता तथा स्पष्टता आती है अतः प्रभावी सम्प्रेषण की क्षमता भी बढ़ती है।

आपसे अपेक्षाएँ

- जब आप पढ़ाने के विविध तरीके अपनायेंगे तभी शिक्षार्थी अच्छी तरह सीख पायेंगे।
- करके सीखने के लिए नवीन पुसतकों में बहुत कम चीजों से बहुत कुछ सीखने की विधियाँ बतायी गयी हैं।
- नवीन पुस्तकों में दी गयी गतिविधियों में शिक्षार्थियों के लिए स्पष्ट निर्देश हैं। उन्हें सक्रिय रखना आवश्यक है।
- गणित में हम साधारण भाषा के साथ-साथ एक विशेष भाषा ''**गणित की भाषा**'' का भी प्रयोग करते हैं। शिक्षार्थियों को हमें इन दोनों ही भाषाओं का प्रयोग सीखना होगा।
- व्यावहारिक जीवन की समस्याओं के हल के लिए गणित में तथ्य याद करना और कौशल हासिल करना दोनों ही आवश्यक है।
- शिक्षार्थी अधिक तेजी से काम करें इसके लिए आप कुछ समय सीमा भी निर्धारित कर सकते हैं। इससे उनमें सीखने की रफ्तार बढ़ेगी।
- गणित के खेल केवल मनोरंजन या अभ्यास के लिए नहीं है। इनसे अवधारणाएँ समझने, कौशल विकसित करने, तथ्यों को जानने, शब्दावली और भाषा समझने और मन में ही गणना करके झटपट उत्तर देने में सहूलियत होती है।
- शिक्षण सामग्री के प्रयोग से शिक्षार्थी का अधिगम पुष्ट होता है तथा उसे सीखने में सहजता होती है। कुछ शैक्षिक साधनों को तैयार करने में देरी लगती है, कुछ शीघ्र बनायी जा सकती हैं, पर इनका उपयोग बार-बार भी किया जा सकता है। इन्हें सम्भाल कर रखने से शीघ्र ही आप के पास शिक्षण-सामग्री का एक बैंक बन जायेगा।
- शिक्षार्थियों को अगर गणित के बारे में खूब बातें करने का मौका मिलेगा तो इससे उनकी गणित की समझ विकसित होगी और बेहतर बनेगी।
- शिक्षार्थियों के मूल्यांकन की योजना बनायें। प्रश्न भी बनवायें। पाठ पढ़ाते समय गृहकार्य, मौखिक परीक्षाएँ और लिखित परीक्षाएँ आदि मूल्यांकन के विविध तरीके हो सकते हैं। प्राप्त अधिगम की सम्पुष्टि के लिए सतत मूल्यांकन अत्यावश्यक है।
- किसी पाठ को पढ़ाते समय आप कितना गृहकार्य देंगे, इसे तय करें। आप कक्षा के काम और गृहकार्य की जाँच कैसे करेंगे ? इसे कक्षा की क्षमता के अनुसार निर्धारित करें। मेधावी बच्चों को समूह का नेतृत्व अलग-अलग देकर भी मूल्यांकन कराया जा सकता है।

- प्रत्येक पाठ आप किस गति से पढ़ायेंगे इसे तय करें। एक अच्छी योजना के तहत विषय की स्पष्ट व्याख्या के बाद आपको लम्बे समय तक बोलना नहीं पड़ेगा और शिक्षार्थियों को स्वयं अभ्यास करने का समय मिल जाएगा। शिक्षार्थियों को चुप-चाप लम्बे व्याख्यान भी नहीं झेलने पड़ेंगे।
- अपनी कक्षा को आकर्षक बनाएँ तथा कक्षा की बैठक इस प्रकार जमाएँ जिससे कि सभी छात्र आपको देख सकें।
- श्यामपट्ट को साफ रखें तथा उस पर मुख्य बिन्दुओं को लिखें।
- यदि आवश्यक हो तो कुछ चार्ट, स्लाइड, मॉडल आदि पहले से ही शिक्षण अधिगम सामग्री (*T.L.M.*) बना लें।
- आप कक्षा में पहली बात क्या सिखाएंगे, दूसरी कौन सी होगी ? इसे तय करें तथा एक तार्किक क्रम में उसका शिक्षण करें। आप देखें कि ऐसा करने पर कम समय में ही शिक्षार्थियों को अधिक अधिगम हो सकेगा।
- कक्षा में आपकी आवाज कक्षा के अनुसार तेज व स्पष्ट हो जिससे कि सभी शिक्षार्थी आसानी से सुन व समझ सकें।
- किसी प्रकरण (विषय वस्तु) का अन्त हमेशा स्पष्ट तरीके से करें। उसे अधूरा न छोड़ें।
- यह जानने के लिए शिक्षार्थियों को विषय-वस्तु समझ में आ रही है कि नहीं बीच-बीच में प्रश्न भी पूछते रहें।
- गणित के नये अभ्यास करते समय शिक्षार्थियों को ऐसा सवाल न दें जो बहुत ही कठिन हों।
- आप अपने शिक्षण का स्तर जितना गुणवत्ता युक्त करेंगे, उसे और अधिक बेहतर करने की आपकी इच्छा होगी। हमें विश्वास है कि इस महत्वपूर्ण काम को शुरू करने में नवीन पुस्तकें आपके लिए आवश्यक सहायक होंगी।

ध्यान देने योग्य बातें

- किसी इकाई के प्रभावी शिक्षण के लिए उसमें दी गयी विषय-वस्तु का पहले से अध्ययन कर लिया जाय।
- किसी इकाई का शिक्षण करते समय पुस्तक में दी गयी सारणियों का प्रयोग करने हेतु अभ्यास पुस्तिका/श्याम पट्ट पर सारणियाँ शिक्षार्थियों से अनिवार्य रूप से बनवायी जायं तथा उसे निर्देशानुसार पूर्ण कराया जाय। शिक्षार्थियों को भी श्यामपट्ट पर प्रश्न हल करने का अवसर दिया जाय। इससे उनमें आत्म विश्वास बढ़ेगा।
- आप से अपेक्षा की जाती है कि निश्चित समयावधि में गणित के सम्पूर्ण पाठ्यक्रम का शिक्षण सुनिश्चित करें जिससे कि शिक्षार्थियों को अगली कक्षा में अध्ययन करते समय पाठ्यक्रम से सम्बन्धित ज्ञान में अल्पज्ञता अथवा रिक्तता का अनुभव न हो।

- शिक्षण के साथ-साथ अभ्यास और समेकित अभ्यास भी शिक्षार्थियों से कराये जायं तथा उनके कार्य का विधिवत निरीक्षण भी किया जाय जिससे कि उनकी कठिनाइयों का निराकरण तत्काल किया जा सके।
- शिक्षार्थियों को उनकी मानसिक क्षमता के अनुसार गृहकार्य नियमित रूप से दिये जायं जिसका निरीक्षण/संशोधन अगले दिन अवश्य किया जाय।
- शिक्षार्थियों में इतना आत्म विश्वास पैदा कर दिया जाय कि प्रश्न हल करने के साथ-साथ वे स्वयं भी प्रश्नों का निर्माण कर सकें।
- शिक्षार्थियों से उत्साहवर्द्धक / प्रेरणादायक शब्दों यथा ''शाबास'', ''बहुत अच्छा'', ''वेरी गुड'' आदि का प्रयोग करके उनका पुनर्बलन किया जाय तथा मनोबल बढ़ाया जाय।
- गुणवत्ता परक शिक्षा प्राप्त करना सभी बच्चों का संवैधानिक अधिकार है। अतः कक्षा के पिछड़े हुए तथा अल्पार्जी शिक्षार्थियों के लिए आवश्यकतानुसार अतिरिक्त समय देकर उपचारात्मक शिक्षण की व्यवस्था की जाय।
- मेधावी शिक्षार्थियों के लिए भी उनकी मानसिक योग्यता का सदुपयोग करने के लिए कुछ अतिरिक्त ज्ञानवर्द्धक पुस्तकों/पत्रिकाओं की व्यवस्था की जाय।
- पुस्तक में बताये गये क्रिया कलापों के अतिरिक्त भी शिक्षार्थियों को समूह में बाँट कर पाठ से सम्बन्धित विविध क्रिया-कलाप कराये जायें जिससे उनमें सहयोग, सहभागिता की मनोवृत्ति उत्पन्न हो सके।
- विशेष उल्लेखनीय है कि आप को एक मार्ग दर्शक और सहयोगी शिक्षक की भूमिका निभानी है। शिक्षण एक पक्षीय न होकर द्विपक्षीय होना चाहिए। कक्षा में शिक्षण के समय प्रत्येक शिक्षार्थी की सहभागिता सुनिश्चित की जाय।
- कोई भी तथ्य शिक्षार्थियों पर थोपना नहीं है। अपितु उन्हें तथ्य परक निष्कर्ष स्वतः निकालने हेतु अभिप्रेरित करना है। शिक्षक की कुशलता एवं सफलता शिक्षार्थियों को सीखने के लिए अभिप्रेरणा प्रदान करने में है।
- गृहकार्य देने तथा प्रोजेक्ट कार्य के लिए बच्चों की सामाजिक व आर्थिक पृष्ठभूमि को भी ध्यान में रखना अत्यावश्यक है।
- प्रश्नों व उनके हल की प्रक्रिया पर बच्चों से वार्तालाप, तर्क-वितर्क कराकर सही निर्णय/निष्कर्ष पर पहुँचने से उनके अन्दर से झिझक टूटेगी तथा उनके आत्म विश्वास में वृद्धि होगी।

सम्प्रेषण कौशल

(Communication Skill)

''सम्प्रेषण'' शब्द का उद्‌गम लैटिन के शब्द *Communis* से हुआ जिसका अर्थ है साधारण *(Common)*या सामान्य। परन्तु यहाँ इसका तात्पर्य है सामान्य रूप से विचारों का आदान-प्रदान। दूसरे शब्दों में इसका अर्थ है किसी दूसरे अथवा दूसरों के ज्ञान का सूचनाओं से संवर्द्धन करना। यह भी कहा जा सकता है एक व्यक्ति द्वारा दूसरे व्यक्ति को जानकारी या सूचना देना जो दूसरा व्यक्ति समझ लें, ''सम्प्रेषण'' कहलाता है।

कक्षा शिक्षण का एकमात्र उद्देश्य ही यह होता है कि शिक्षक द्वारा बच्चों को दी गयी जानकारी बच्चे समझ जायें। अतएव ''सम्प्रेषण'' का शिक्षण में बड़ा महत्व है। इस समझने की प्रक्रिया में दक्षता को ही ''सम्प्रेषण'' कौशल की संज्ञा दी गयी है। अतएव इस प्रक्रिया में शिक्षक शिक्षार्थी दोनों की सहभागिता आवश्यक है। यह जानना आवश्यक है कि सम्प्रेषण कौशल में किन बातों की आवश्यकता होती है।

सम्प्रेषण की आवश्यकताएँ :

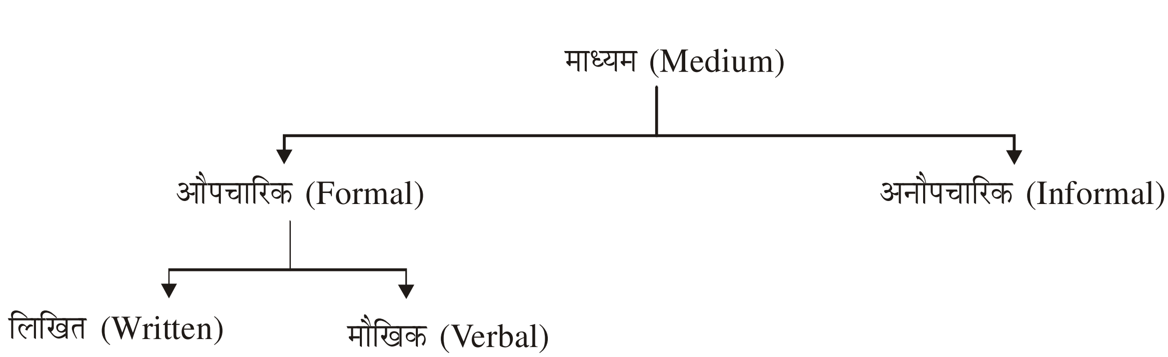
⌘ विचारों तथा संदेश की स्पष्टता।
Clarity of thoughts and existence of message

⌘ शब्दों के स्थान पर क्रिया आधारित सम्प्रेषण को महत्व देना।
Attach importance to action rather than words.

⌘ प्रतिभागिता (दो तरफा सम्प्रेषण)
Participation / Two way message

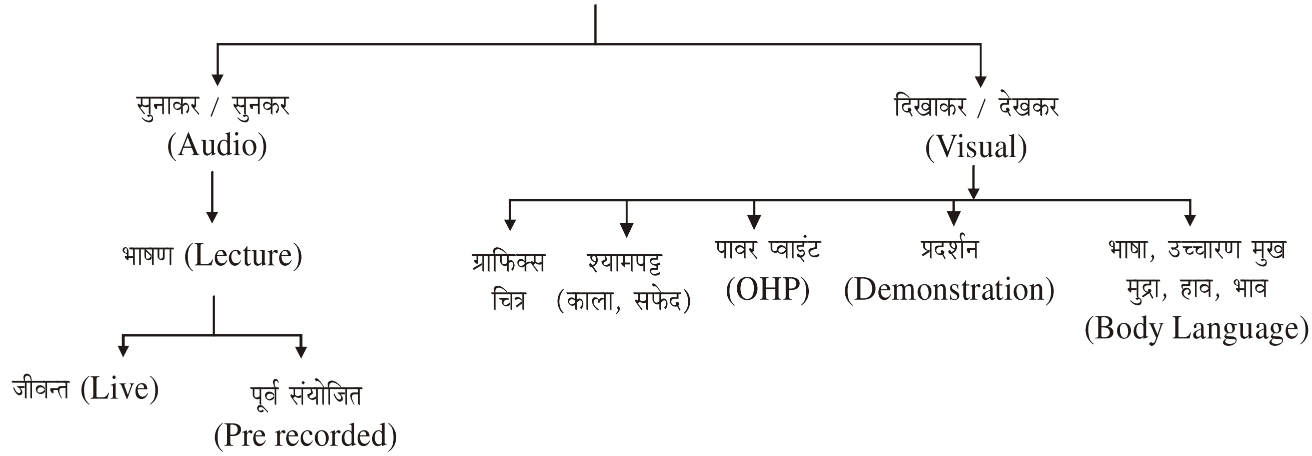
⌘ प्रसारण
Transmission

⌘ तन्त्र में जीवन्तता रखना
Keep the System always alive



(कक्षा कक्ष में सम्प्रेषण)

(Class Room Communication)



सम्प्रेषण की बाधाएँ *(Barriers to communication)*

⌘ अपूर्ण आँकड़ों का संकलन *(Incomplete data)*

⌘ अपूर्ण सूचनाएँ *(Incomplete Informations)*

⌘ गलत प्रकार से संदेश का निर्माण व प्रसार *(Faulty development of message i.e. imprudent selection and editing of data)*

⌘ गलत प्रसार माध्यम का चयन *(Wrong Selection of media)*

⌘ गलत एनकोडिंग *(Wrong encoding)*

⌘ गलत डीकोडिंग *(Wrong decoding)*

⌘ गलत भाषण व गलत उच्चारण

⌘ अक्षरों व शब्दों का आकार, स्पष्टता, सुन्दर न होना।

⌘ वर्तनी सम्बन्धी दोष का होना।

स्पष्ट रूप से शिक्षक - शिक्षार्थी के बीच संवाद, रूचिपूर्ण शिक्षण सामग्री का उपयोग शिक्षक के सम्प्रेषण कौशल को विकसित करता है। कहना अनुचित नहीं होगा।

इकाई 1 बीजगणित तथा लघुगणक

अध्याय 1- बहुपद तथा उनके गुणनखण्ड

उद्देश्य

- बीजगणित व्यंजकों में एक चरी बहुपद की पहचान कराना
- बहुपदों की विभिन्न संक्रियाओं का ज्ञान कराना
- बहुपदों के गुणनखण्ड कराना

शिक्षण बिन्दु

- बहुपद को परिभाषित एवं विभिन्न रूपों का परिचय कराना
- दो बहुपदों का योग, अन्तर, गुणनफल एवं भाजन कराना
- बीजगणित व्यंजकों के गुणनखण्ड
- द्विघात त्रिपद व्यंजक $(ax^2+bx+c,\ a\neq 0)$ का गुणनखण्ड (मध्य पद को दो भागों में बाँट कर तथा पूर्ण वर्ग बनाकर)
- गुणनखण्ड प्रमेय, शेषफल प्रमेय (केवल कथन)

प्रस्तुतीकरण

- शिक्षार्थियों से प्रश्न पूछें कि व्यंजकों $2x,\ x^3,\ x^9$ में कितने पद हैं ?
- उनके उत्तर के आधार पर स्पष्ट करें कि ऐसे व्यंजक एक पदी कहलाते हैं।

परिभाषा : -

$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...........+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0$ और n एक ऋणेत्तर पूर्णांक है,

$a_0, a_1, ...\ a_n$ वास्तविक संख्याएं है

के प्रकार के व्यंजक को बहुपद कहते हैं, इसका घात n है।

मानक रूप : इस बहुपद में x के घात को अवरोही क्रम में लिखने पर प्राप्त बहुपद, को मान बहुपद कहते हैं।

जैसे - $p(x) = x^2 + 2x + 1$ मानक रूप में है।

बहुपद के प्रकार :

एकपदी बहुपद (*Monomial*) - ऐसे बहुपद जिसमें केवल एक पद हो, एक पदी बहुपद कहलाता है।

जैसे - $2x^3, 7x$ आदि।

द्विपद बहुपद (*Binomial*) - ऐसे बहुपद जिसमें दो पद हों, द्विपद बहुपद कहलाता है।

जैसे - $2x^2 + 3, x^3 + 7$ आदि

त्रिपद बहुपद (*Trinomial*) - ऐसे बहुपद जिसमें तीन पद हों, त्रिपद बहुपद कहलाता है।

जैसे - $2x^2 + x + 5, 3x^3 + 7x + 2$ आदि।

शून्य बहुपद *(Zero Polynomial)*- ऐसे बहुपद जिसके सभी गुणांक शून्य हो, शून्य बहुपद कहलाता है।

जैसे - $0x^2 + 0x + 0$ आदि।

दो बहुपदों का योग, अंतर एवं गुणनफल

माना $p(x) = 3x^2 + 2x + 5$

और $q(x) = 2x^2 + 2x + 3$

बहुपद हैं।

तो, इनका योग, अंतर एवं गुणनखण्ड निम्नवत् है -

$p(x) + q(x) \quad = (3x^2 + 2x + 5) + (2x^2 + 2x + 3)$

$\quad = (3x^2 + 2x^2) + (2x + 2x) + (5 + 3)$

या, $p(x) + q(x) = 5x^2 + 4x + 8$ (सदृश घातों को एकत्रित करके एवं गुणांकों को जोड़ने पर)

$p(x) - q(x) \quad = (3x^2 + 2x + 5) - (2x^2 + 2x + 3)$

$\quad = (3x^2 - 2x^2) + (2x - 2x) + (5 - 3)$

(सदृश घातों को एकत्रित करके एवं सरल करने पर)

या, $p(x) - q(x) = x^2 + 2$

$p(x) . q(x) \quad = (3x^2 + 2x + 5) . (2x^2 + 2x + 3)$

$\quad = 6x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 4x^3 + 4x^2 + 6x + 10x^2 + 10x + 15$

$\quad = 6x^4 + 10x^3 + 23x^2 + 16x + 15$

बहुपद का एक अन्य बहुपद से भाजन -

माना $p(x)$ को $g(x)$ बहुपद से भाग देते हैं,

तो $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$

जहाँ पर $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात, $q(x)$ भागफल, $r(x)$ शेषफल प्राप्त होता है।

उदाहरण : $p(x)$ को $g(x)$ से भाग दीजिए जबकि $p(x) = x^4 + 1$

$g(x) = x + 1$

हल :

$$
\begin{array}{r l}
 & x^3 - x^2 + x - 1 \\
x+1 & \overline{)\, x^4 + 1} \\
 & x^4 + x^3 \\
\hline
 & -x^3 + 1 \\
 & -x^3 - x^2 \\
\hline
 & x^2 + 1 \\
 & x^2 + x \\
\hline
 & -x + 1 \\
 & -x - 1 \\
\hline
 & 2 \text{ शेषफल}
\end{array}
$$

भागफल = $q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

और शेषफल $r(x) = 2$

शेषफल की घात = 0

तथा $g(x)$ की घात = 1 **उत्तर**

बहुपद के रूप *(Forms of polynomial)*

अ. रैखिक बहुपद *(Linear Polynomial)* **- घात एक का बहुपद रैखिक बहुपद कहलाता है।**

जैसे - $ax + b, a \neq 0$ एक रैखिक बहुपद है।

ब. द्विघातीय बहुपद *(Quadratic Polynomial)* **- घात दो का बहुपद द्विघातीय बहुपद कहलाता है।**

जैसे - $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ एक द्विघातीय बहुपद है।

स. त्रिघातीय बहुपद *(Cubic Polynomial)* **- घात तीन का बहुपद, त्रिघातीय बहुपद कहलाता है।**

जैसे - $ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ एक त्रिघातीय बहुपद है।

द. चतुर्घात बहुपद *(Biquadratic Polynomial)* **- घात चार का बहुपद, चतुर्घात बहुपद कहलाता है।**

जैसे - $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a \neq 0$ एक चतुर्घात बहुपद है।

गुणनखण्ड संक्रिया (*Process of factorization*)

बहुपद के गुणनखण्ड (*Factoring of a Polynomial*)

इसमें सर्वप्रथम उभयनिष्ठ गुणनखण्ड विधि के विषय में चर्चा करेंगे।

यदि कोई संख्या या बीजीय राशि किसी दिये गये व्यंजक के सभी पदों में सम्मिलित होती है, वह संख्या या

बीजीय राशि अथवा संख्या और बीजीय राशि (दोनों) उस व्यंजक का सर्वनिष्ठ गुणनखण्ड कहलाती है।

सर्वनिष्ठ गुणनखण्ड से सभी पदों को भाग देने पर जो भागफल प्राप्त होता है, वह उस व्यंजक का दूसरा गुणनखण्ड कहलाता है।

उदाहरण - $xy^2 + x^2y$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ?

हल - $xy^2 + x^2y = xy\,(x+y)$

xy सार्वगुणनखण्ड है।

चार या अधिक पदों के बहुपद के गुणनखण्ड *(Factorisation of a Polynomial having four or more term)* -

इसमें समूहों को इस प्रकार विभक्त करते हैं जिसमें कोई एक गुणनखण्ड सर्वनिष्ठ हों।

उदाहरण - $ax + bx + 3a + 3b$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ?

हल - $ax + bx + 3a + 3b$

$= ax + 3a + bx + 3b$

$= a(x + 3) + b(x + 3)$

$= (a + b)(x + 3)$

त्रिपद द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ का गुणनखण्ड -

यहाँ पर मुख्यतः दो विधियों की बात करेंगे :

अ. मध्य पद को दो भागों में बाँटकर

ब. पूर्ण वर्ग बनाकर

अ. मध्य पद को दो भागों में बाँटकर -

माना $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ एक त्रिपद द्विघात बहुपद है।

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = a}\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

माना $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + p)\,(x + q)$

$= x^2 + (p + q)\,x + pq$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = p + q$

$\frac{c}{a} = pq$

या $ac = (ap).(aq)$

$\Rightarrow (ap)+(aq) = b$

$\& (ap).(aq) = ac$

अत: $ax^2 + bx + c$ के गुणनखण्ड निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं :

1. x^2 के गुणांक (यदि 1 हो, तो भी) को अचर पद से गुणा करते हैं।

अर्थात् a और c का गुणा करके ac प्राप्त करते हैं।

2. ac के दो गुणनखण्ड इस प्रकार करते हैं कि इनका योगफल x के गुणांक के बराबर हो।

अर्थात ac के दोनों गुणनखण्डों का योगफल b के बराबर हो।

3. इस प्रकार चार पदों के बहुपद के गुणनखण्ड की विधि से गुणनखण्ड कर लेते हैं।

उदाहरण - $2x^2 + 7x + 5$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ?

हल - माना p और q दो संख्याएँ इस प्रकार हैं कि

$p + q = 7$ .... (1)

$pq = 2 \times 5 = 10$ .... (2)

समीकरण (1) और समीकरण (2) को हल करने पर

$p = 5$

$q = 2$

$$\begin{aligned}\therefore 2x^2 + 7x + 5 &= 2x^2 + (2+5)x + 5\\ &= 2x^2 + 2x + 5x + 5\\ &= 2x(x+1) + 5(x+1)\\ &= (x+1)(2x+5)\end{aligned}$$

$\therefore 2x^2 + 7x + 5 = (x+1)(2x+5)$ उत्तर

ब. पूर्ण वर्ग बनाकर -

किसी त्रिपद द्विघात बहुपद को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए सर्वप्रथम देखना होगा कि कि x^2 वाला पद पूर्ण वर्ग है या नहीं। यदि नहीं तो उसे पूर्ण वर्ग बना लेते हैं। अब इसके वर्गमूल के दूने से x वाले पद को भाग देकर तथा उसका वर्ग बनाकर तीसरा पद लिख लेते हैं। इस प्रकार या तो त्रिपद पूर्ण वर्ग बन जाता है या यह दो वर्गों के अंतर में निरूपित हो जाता है। तब सूत्र $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ से गुणनखण्ड हो जाते हैं।

उदाहरण 1 - $9x^2 + 24x + 16$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ?

हल - दिया गया व्यंजक

$9x^2 + 24x + 16$

उपरोक्त त्रिपद व्यंजक में $9x^2$ का वर्गमूल $3x$ है, जिसके दूने अर्थात् $6x$ से $24x$ को भाग देने पर 4 प्राप्त हुआ। अतः $4^2 = 16$ इसका तृतीय पद है।

$$\therefore 9x^2 + 24x + 16 = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 4 + (4)^2$$

$$= (3x + 4)^2$$

उदाहरण 2 - $x^2 + 10x - 24$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ?

हल - दिया गया व्यंजक

$x^2 + 10x - 24$ ($\therefore$ x^2 का वर्गमूल x है जिसके दूने अर्थात $2x$ से $10x$ को भाग देने पर 5 प्राप्त हुआ और 5 के वर्ग को जोड़ने और घटाने पर)

$= x^2 + 2 \times 5 \times x + (5)^2 - (5)^2 - 24$

$= (x + 5)^2 - 25 - 24$

$= (x + 5)^2 - 49$

$= (x + 5)^2 - (7)^2$

$= (x + 5 + 7)(x + 5 - 7)$ $\{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)\}$

$= (x + 12)(x - 2)$

$\therefore x^2 + 10x - 24 = (x + 12)(x-2)$ उत्तर

उदाहरण 3 - $9x^2 - 30x - 144$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ?

हल : $9x^2 - 30x - 144$ ($9x^2$ का वर्गमूल $3x$ है जिसके दूने $6x$ से $30x$ को भाग देने पर 5 प्राप्त होगा। अब $5^2 = 25$ इसका तृतीय पद होगा जिसे जोड़ा और घटाया।)

$= (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 5 + 25 - 25 - 144$

$= (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 5 + (5)^2 - 169$

$= (3x - 5)^2 - (13)^2$

$= (3x - 5 + 13)(3x - 5 - 13)$ $\{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\}$

$= (3x + 8)(3x - 18)$

$= 3(3x + 8)(x - 6)$

$\therefore 9x^2 - 30x - 144 = 3(3x + 8)(x - 6)$ उत्तर

शेषफल प्रमेय - माना $p(x)$, घात ≥ 1 का एक बहुपद है और k एक वास्तविक संख्या है। यदि $p(x)$ को k से भाग दिया जाए तो शेषफल $p(k)$ प्राप्त होगा।

उदाहरण - $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 4$ को $x - 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए ?

हल - दिया है

$p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 4$

अभीष्ट शेषफल $p(1) = 1^4 - 3.1^2 + 2.1 + 4$ (शेषफल प्रमेय से)।

$= 1 - 3 \ +2 +4$

$= 4$ उत्तर

गुणनखण्ड प्रमेय

माना $p(x)$, घात n का एक बहुपद है। यदि किसी वास्तविक संख्या k के लिए

$p(k) \ = 0$

हो, तो $(x - k)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा।

विलोमतः यदि $(x - k)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है तो $p(k) = 0$

उदाहरण 1 - $x^3 - 7x + 6$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ?

हल - अचर पद 6 के गुणनखण्ड

$= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x^3 - 7x + 6$ में $x = 1$ रखने पर

शेषफल $= 1^3 - 7 \times 1 + 6$

$= 1 - 7 + 6$

$= 0$

गुणनखण्ड प्रमेय से,

$(x - 1)$, दिया गया व्यंजक $x^3 - 7x + 6$ का गुणनखण्ड होगा।

$x^3 - 7x + 6 = x^2(x - 1) + x(x - 1) - 6(x - 1)$

$= (x - 1)\ (x^2 + x - 6)$

$= (x - 1)\ (x^2 + 3x - 2x - 6)$

$= (x - 1)\ \{x(x + 3) - 2(x + 3)\}$

$= (x - 1)\ (x - 2)(x + 3)$

$x^3 - 7x + 6 = (x - 1)\ (x - 2)(x + 3)$ उत्तर

उदाहरण 2 - $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिये ?

हल - अचर पद 24 के गुणनखण्ड

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ में

$x = 1$ रखने पर

शेषफल $= 1^4 - 10 . 1^3 + 35 . 1^2 - 50 . 1 + 24$

$= 60 - 60$

$= 0$

गुणनखण्ड प्रमेय से,

$(x - 1)$, दिया गया व्यंजक

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$\therefore\ x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

$= x^3(x - 1) - 9x^2(x - 1) + 26x(x-1) - 24(x-1)$

$= (x - 1)(x^3 - 9x^2 + 26x - 24)$ .... (1)

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ में $x = 1$ रखने पर

शेषफल $= 1^3 - 9.1^2 + 26.1 - 24 = 1 - 9 + 26 - 24 = -6 \neq 0$

$\therefore (x - 1), (x^3 - 9x^2 + 26x - 24)$ का गुणनखण्ड नहीं होगा। (गुणनखण्ड प्रमेय से)

अब, $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ में

$x = 2$ रखने पर

शेषफल $= (2)^3 - 9.(2)^2 + 26 \times 2 - 24$

$= 8 - 36 + 52 - 24$

$= 60 - 60$

$= 0$

गुणनखण्ड प्रमेय से,

$(x - 2)$, $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ का एक गुणनखण्ड होगा।

पुनः $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

$= x^2(x - 2) - 7x(x - 2) + 12(x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 - 7x + 12)$

$= (x - 2)\{x^2 - (4 + 3)x + 12\}$

$= (x - 2)\{x^2 - 4x - 3x + 12)$

$= (x - 2)\{x(x - 4) - 3(x - 4)$

$= (x - 2)(x - 3)(x - 4)$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) समीकरण से,

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

$= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ उत्तर

मूल्यांकन :

1. निम्नलिखित फलनों में कौन-कौन से बहुपद हैं :

   (i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $y^2 + 3y$

   (iii) $x + \frac{1}{x}$ (iv) $x^2 + \sqrt{x} + 5$

2. निम्नलिखित व्यंजकों में एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी ज्ञात कीजिए

   (i) $5x$ (ii) $x^2 + 2x + 1$

   (iii) $(x + 5)^2$ (iv) $x^2 + 2x$

   (v) $(x + 1)^3$

3. निम्नलिखित बहुपद समूहों का योगफल, अंतर ज्ञात कीजिए

   (i) $x^3 - 1$ और $x^2 + 7$ (ii) $x^3 + 1$ और $x^2 - 1$

4. जाँच कीजिए कि क्या $x - 3$, $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 18$ का एक गुणनखण्ड है ?

5. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए

   (i) $6x - 8y$ (ii) $abc - byx$ (iii) $xy + 7(x + y) + 49$

   (iv) $x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1$ (v) $x^4 - y^4$ (vi) $81x^3 - x$

   (vii) $x^2 + 8x + 15$ (viii) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ (ix) $6x^4 - 24x^3y^3 + 24y^6x^2$

   (x) $6\sqrt{3}x^2 + 47x + 5\sqrt{3}$

6. निम्नलिखित बहुपद युग्मों, गुणनखण्ड प्रमेय द्वारा ज्ञात कीजिए कि क्या $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है ?

   (i) $p(x) = 2x^3 + 4x + 6,\ g(x) = x + 1$

   (ii) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4,\ g(x) = x - 2$

7. व्यंजक $x^3 + x^2 + x - 4$ में $(x - 1)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

8. $x^3 + 7x^2 + 2x - 40$ के गुणनखण्ड कीजिए।

9. यदि $x^2 + ax + b$ के गुणनखण्ड $(x - 2)$ और $(x - 3)$ हों, तब a और b के मान ज्ञात कीजिए।

10. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$ के गुणनखण्ड कीजिए ?

अध्याय 2. एक चर राशि में रैखिक समीकरण का वाणिज्यिक गणित, मेन्सुरेशन आदि में अनुप्रयोग

उद्देश्य

- ➲ वाणिज्यिक गणित से सम्बन्धित प्रश्नों में रैखिक समीकरणों का उपयोग करना।
- ➲ रैखिक समीकरणों की सहायता से मेन्सुरेशन के प्रश्नों को हल करना।
- ➲ रैखिक समीकरणों के अनुप्रयोग से संख्या सम्बन्धी, आयु सम्बन्धी तथा अनुपात सम्बन्धी प्रश्नों को हल करना।

शिक्षण बिन्दु :

एक चर राशि वाले रैखिक समीकरणों के अनुप्रयोग से :

- ☞ वाणिज्यिक गणित से सम्बन्धित प्रश्नों को हल करना
- ☞ मेन्सुरेशन से सम्बन्धित प्रश्नों को हल करना।
- ☞ संख्या सम्बन्धी प्रश्नों को हल करना।
- ☞ आयु सम्बन्धी प्रश्नों को हल करना।
- ☞ अनुपात सम्बन्धी प्रश्नों को हल करना।

प्रस्तुतीकरण

❖ रैखिक समीकरणों के अनुप्रयोग

हम जानते हैं कि दैनिक जीवन में आने वाली विभिन्न समस्याओं को हल करने में अनेक गणनाए करनी पड़ती हैं। जैसे वाणिज्यिक गणित, मेन्सुरेशन, आदि से सम्बन्धित समस्याओं में गणनाएँ करनी पड़ती हैं। उनमें से अनेक गणनाएँ अंकगणित के माध्यम से सरलतापूर्वक नहीं की जा सकती हैं, जबकि बीजगणित के माध्यम से ऐसी गणनाएँ करना अपेक्षाकृत सरल हैं। इसी क्रम में हम उपर्युक्त से सम्बन्धित गणनाओं में एक चर में रैखिक समीकरणों का उपयोग उदाहरणों के माध्यम से जानेंगे।

इसके लिए शिक्षक, शिक्षार्थियों की सहायता से सम्बन्धित समस्या में दिए गये कथनों को एक चर वाले रैखिक समीकरणों में परिवर्तित करें। इसके बाद प्राप्त रैखिक समीकरण को हल करके समस्या का हल प्राप्त करें।

वाणिज्यिक गणित सम्बन्धित प्रश्नों का हल

उदाहरण 1. एक व्यक्ति ने ₹ 25,000 को दो प्रकार के बाण्डों में निवेश किया। एक पर उसे 12% तथा दूसरे पर 8% वार्षिक ब्याज मिलता है। यदि उसकी इनसे वार्षिक आय ₹ 2600 है, तो ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक प्रकार के बाण्ड में उसने कितने रुपए निवेश किए ?

हल : माना कि उस व्यक्ति ने 12% वार्षिक ब्याज की दर वाले बाण्ड में x रुपए लगाए।

तो 8% वार्षिक ब्याज की दर के बाण्ड में $(25000 - x)$ रुपए लगाए।

पहले प्रकार के बाण्ड पर 1 वर्ष का ब्याज $= \dfrac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

$$= \frac{x \times 12 \times 1}{100} \text{ रुपये}$$

$$= \frac{3x}{25} \text{ रुपये}$$

दूसरे प्रकार के बाण्ड पर ब्याज $= \dfrac{(25000 - x) \times 8 \times 1}{100}$ रुपये

$$= \frac{2(25000 - x)}{25} \text{ रुपये}$$

$$= \frac{50000 - 2x}{25} \text{ रुपये}$$

चूँकि कुल वार्षिक ब्याज (आय) ₹ 2600 है,

इसलिए $\dfrac{3x}{25} + \dfrac{50,000 - 2x}{25} = 2600$

या $3x + 50,000 - 2x = 65,000$ (25 का दोनों पक्षों में गुणा करने पर)

या $3x - 2x = 65,000 - 50,000$

या $x = 15,000$

तथा $25,000 - x = 25,000 - 15,000$

$= 10,000$

अतः उस व्यक्ति ने पहले प्रकार के बाण्ड पर ₹ 15,000 तथा दूसरे प्रकार के बाण्ड पर ₹ 10,000 निवेश किए।

मेन्सुरेशन से सम्बन्धित प्रश्नों को हल करना :

उदाहरण 2 - एक आयताकार मैदान की लम्बाई, उसकी चौड़ाई से 30 मीटर अधिक है। यदि मैदान का परिमाप 144 मीटर हो तो मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : - माना कि मैदान की चौड़ाई x मीटर है।

चूँकि मैदान की लम्बाई, उसकी चौड़ाई से 30 मीटर अधिक है।

इसलिए मैदान की लम्बाई $(x + 30)$ मीटर होगी।

अतः मैदान का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

$= 2(x + 30 + x)$ मी

$= 2(2x + 30)$मी

परन्तु मैदान का परिमाप 144 मी है।

$2(2x + 30) = 144$

या $2x + 30 = 72$

या $2x = 42$

$x = 21$

तथा $x + 30 = 51$

अतः मैदान की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 51 मीटर तथा 21 मीटर है।

मैदान का क्षेत्रफल = ल0 × चौ0

= 51 × 21 मी^{2}

= 1071 मी^{2}

संख्या सम्बन्धी प्रश्नों को हल करना।

उदाहरण 3- किसी संख्या से उसका $\frac{3}{8}$ भाग घटाने पर 20 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल - माना कि संख्या x है।

संख्या का $\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times x$

संख्या से उसका $\frac{3}{8}$ भाग घटाने पर 20 प्राप्त होता है।

$x - \frac{3}{8}x = 20$

या $8x - 3x = 160$ (दोनों पक्षों में 8 का गुणा करने पर)

या $5x = 160$

$x = 32$

संख्या = 32

आयु सम्बन्धी प्रश्नों को हल करना

उदाहरण 4- इस समय पिता की आयु अपने पुत्र की आयु को तीन गुनी है। 15 वर्ष बाद पिता की आयु, पुत्र की आयु की दो गुना रह जाएगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल - माना कि पुत्र की वर्तमान आयु x वर्ष है।

तो पिता की वर्तमान आयु $3x$ वर्ष है।

15 वर्ष बाद पुत्र की आयु $= (x + 15)$ वर्ष

15 वर्ष बाद पिता की आयु $= (3x + 15)$ वर्ष

प्रश्नानुसार

$$(3x + 15) = 2\times (x + 15)$$
$$3x + 15 = 2x + 30$$
$$3x - 2x = 30 - 15$$
$$x = 15$$

तथा $3x = 3\times 15$

$= 45$

अतः पिता की वर्तमान आयु 45 वर्ष तथा पुत्र की वर्तमान आयु 15 वर्ष है।

अनुपात सम्बन्धी

उदाहरण 5- यदि किसी बेलन के वक्रपृष्ठ तथा सम्पूर्ण पृष्ठ का अनुपात 2 : 3 हो, तो उसकी त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल - माना कि बेलन की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है तथा $r : h = x$ अर्थात $\frac{r}{h} = x$

तो $r = h x$

अतः बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi r h$

$= 2\pi\ h x \times h$ $\quad (r = h x)$

$= 2\pi x h^2$

और बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r (h + r)$

$= 2\pi h x (h + h x)$

$= 2\pi h^2 x (1 + x)$

बेलन के वक्रपृष्ठ और सम्पूर्ण पृष्ठ का अनुपात $2 : 3$ है।

$$\frac{2\pi\ xh^2}{2\pi\ h^2 x(1+x)} = \frac{2}{3}$$

या $$\frac{1}{1+x} = \frac{2}{3}$$

या $2x + 2 = 3$

या $2x = 1$

$$x = \frac{1}{2}$$

अतः त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात $1 : 2$ है।

मूल्यांकन :

1. अनिल और अमन की वर्तमान आयु 11 : 8 में है। 6 वर्ष बाद इनकी आयु का अनुपात 4 : 3 हो जाता है, तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए। (उत्तर : 66 वर्ष, 48 वर्ष)
2. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 10 सेमी अधिक है। यदि आयत का क्षेत्रफल 375 सेमी^{2} है, तो उसकी लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए। (उत्तर : 25 सेमी, 15 सेमी)
3. बिक्री कर सहित एक वाशिंग, मशीन का मूल्य ₹ 22890 है। यदि बिक्रीकर की दर 9% है, तो वाशिंग मशीन का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए। (उत्तर 21000)
4. एक व्यक्ति पोस्टआफिस तथा बैंक में कुल ₹ 70,000 जमा करता है। पोस्ट आफिस उसे 8% वार्षिक दर से तथा बैंक 9.5% वार्षिक दर से ब्याज देता है। यदि 1 वर्ष बाद उसकी पूँजी ₹ 75900 हो गयी हो, तो ज्ञात कीजिए कि उसने प्रत्येक प्रतिष्ठान में कितना-कितना रुपया निवेश किया ?

   (उत्तर ₹ 50,000, ₹ 20,000
5. एक संख्या और उसके $\frac{1}{4}$ भाग का योगफल 85 है। संख्या ज्ञात कीजिए। (उत्तर 68)
6. दो समान ऊँचाई के बेलनों के आयतन क्रमशः 189 सेमी^{3} तथा 525 सेमी^{3} हैं। इनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए। (उत्तर 3 : 5)
7. अजय अपने छोटे भाई विजय से 5 वर्ष बड़ा है। यदि 2 वर्ष बाद अजय की आयु, विजय की आयु की दो गुनी होगी, तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए। (उत्तर : 8 वर्ष, 3 वर्ष)

अध्याय 3 लघुगणक

उद्देश्य

शिक्षक शिक्षार्थियों को लघुगणक का बोध कराते हुए :

- लघुगणक का अर्थ समझा सकेंगे।
- घात के लघुगणक को घात में व्यक्त करने की दक्षता विकसित कर सकेंगे।
- आधार 10 पर सामान्य लघुगणक का ज्ञान करा सकेंगे।
- पूर्णांश एवं अपूर्णांश का बोध सरल रूप में कराने की क्षमता विकसित करना।
- प्रतिलघुगणक का अर्थ एवं लघुगणकों के नियम का बोध करा सकेंगे।

शिक्षण बिन्दु

- लघुगणक का अर्थ
- घात के लघुगणक को घात में व्यक्त करना।
- आधार 10 पर सामान्य लघुगणक
- पूर्णांश एवं अपूर्णांश
- प्रतिलघुगणक का अर्थ।
- लघुगणकों के नियम

लघुगणक का अर्थ

शिक्षक शिक्षार्थियों से निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति करायें

घातांक n के रूप में	2^n	3^n	4^n	5^n	8^n	10^n	11^n	2^n	3^n
संख्या	8	81	16	125	64	10000	11	3	6
n का मान	3	4	—	—	—	—	—	—	—

यहाँ, $4^n = 16$, $5^n = 125$, $8^n = 64$, $10^n = 10000$, $11^n = 11$ आदि में प्रत्येक दशा में n का मान शिक्षार्थी ज्ञात कर लेते हैं, किन्तु $2^n = 3$ या $3^n = 6$ में n का मान सरलता से ज्ञात नहीं होता है, क्योंकि यहाँ n कोई पूर्ण संख्या नहीं हैं।

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि

$2^n = 3$ या $3^n = 6$ में n का मान लघुगणक के रूप में लिखकर प्राप्त कर सकते हैं।

यथा $n = log_2 3$ या $n = log_3 6$

एक धनात्मक वास्तविक संख्या $a, (a \neq 1)$ के लिए अगर $a^m = b$ हो, तो $log_a b = m$

यहाँ, आधार a पर b का लघुगणक (*logarithm*) m है। *log* (लॉग) लघुगणक के अंग्रेजी शब्द *logarithm* का संक्षिप्त रूप है।

$$\boldsymbol{a^m = b \Leftrightarrow log_a b = m}$$

नोट 1. *log* में 'एल' को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर से ही लिखते हैं।

2. आधार a को b की अपेक्षा छोटा तथा नीचे लिखते हैं।

शिक्षार्थियों को लघुगणक के अर्थ का बोध निम्नांकित रूप में करायें -

किसी दिए हुए आधार पर किसी संख्या का लघुगणक, आधार का वह घातांक होता है, जिसे आधार पर लगाने से वह संख्या प्राप्त की जा सकती है।

उदाहरण $log_2 8 = ?$

चूँकि $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$log_2 8 = 3$

इसी प्रकार $log_3 81 = 4$ क्योंकि $3^4 = 81;$ $4^2 = 16 \Leftrightarrow log_4 16 = 2$

शिक्षार्थियों से $5^2 = 25$ को लघुगणक रूप में व्यक्त करायें।

घात के लघुगणक को घात में व्यक्त करना

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि $2^4 = 16$ घातांकीय रूप है, जिसे लघुगणक के रूप में $log_2 16 = 4$ लिखते हैं।

पुनः बोध करायें कि , लघुगणकीय रूप $log_2 16 = 4$ को घातांकीय रूप $2^4 = 16$ में व्यक्त किया जा सकता है।

शिक्षार्थियों को निम्नांकित सारणी का अवलोकन करायें -

लघुगणकीय रूप	घातांकीय रूप
$log_6 36 = 2$	$6^2 = 36$
$log_5 125 = 3$	$5^3 = 125$
$log_{10} 10000 = 4$	$10^4 = 10000$
$log_{10} 0.01 = -2$	$10^{-2} = 0.01$
$log_{10} 1 = 0$	$10^0 = 1$

निम्नांकित उदाहरणों द्वारा बोध करायें।

$log_2 8 = 3,$ क्योंकि $2^3 = 8$

$log_2 64 = 6,$ क्योंकि $2^6 = 64$

$log_3 9 = 2,$ क्योंकि $3^2 = 9$

$log_3 81 = 4,$ क्योंकि $3^4 = 81$

$log_7 1 = 0,$ क्योंकि $7^0 = 1$

यहाँ हम देखते हैं कि लघुगणक एक दूसरे रूप में लिखा हुआ घातांक है। आधार दोनों स्थितियों में समान रहता है।

उक्त सारणी तथा उदाहरण से -

$log_{10} 1 = 0,$ तथा $log_7 1 = 0$

इसके आधार पर शिक्षार्थियों को बोध करायें कि किसी भी धनात्मक आधार (1 को छोड़कर) पर 1 का लघुगणक सदैव 'शून्य' होता है। शिक्षक विद्यार्थियों को इस बात का अहसास कराये कि आधार में हम संख्या 1 को क्यों नहीं लेते हैं।

$log_a 1 = 0,$ जहाँ $(a \neq 1)$

नोट - $log_1 1$ अपरिभाषित है।

आधार 10 पर सामान्य लघुगणक

शिक्षार्थी भिज्ञ है कि हमारी संख्या पद्धति 'दाशमिक' है।

इसलिए, आधार 10 पर लघुगणकों का प्रयोग सुविधाजनक है।

शिक्षार्थियों से 10 के निम्नांकित घातांकीय रूप से लघुगणकीय रूप व्यक्त कराये जाये।

घातांकीय रूप	लघुगणकीय रूप
$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$
$10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$10^{-1} = 0.1$	$\log_{10} 0.1 = -1$
$10^{-2} = 0.01$	$\log_{10} 0.01 = -2$

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि 10 की पूर्णांक घातांक की संख्या का लघुगणक ज्ञात करना आसान है। किन्तु ऐसी संख्याएं जो 10 की पूर्णांक घातांक के रूप में न हों, उनका लघुगणक ज्ञात करने हेतु लघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

लघुगणक सारणी की सहायता से दशमलव में व्यक्त किसी भी संख्या का लघुगणक ज्ञात किया जा सकता है।

इस हेतु दशमलव संख्या को एक 'मानक रूप' में लिखते हैं।

यथा

37.3 को 3.73×10^1

413.7 को 4.137×10^2

0.125 को 1.25×10^{-1}

0.072 को 7.2×10^{-2}

'मानक रूप' की संख्या में केवल एक अंक पूर्णांक होता है।

इस हेतु दशमलव चिह्न को बाएँ या दाएँ हटाना पड़ता है।

दशमलव बिन्दु को जितने स्थान बाएँ हटाते हैं, 10 की उतनी घात से प्राप्त संख्या में गुणा करते हैं।

उपरोक्त उदाहरण से 413.7 का मानक रूप 4.137×10^2

दशमलव बिन्दुओं को जितने स्थान दाएँ हटाते हैं, 10 की उतनी ऋणात्मक घात से प्राप्त संख्या में गुणा करते हैं।

उपरोक्त उदाहरण से 0.072 का मानक रूप 7.2×10^{-2}

पूर्णांश (*characteristics*) एवं अपूर्णांश (*Mantissa*)

शिक्षार्थियों को निम्नांकित घातांकीय रूप तथा उनके लघुगणकीय रूप का अवलोकन करायें

$10^0 = 1 \quad \Leftrightarrow log_{10}1 = 0$

$10^1 = 10 \quad \Leftrightarrow log_{10}10 = 1$

$10^2 = 100 \quad \Leftrightarrow log_{10}100 = 2$

$10^3 = 1000 \quad \Leftrightarrow log_{10}1000 = 3$

$10^{-1} = 0.1 \quad \Leftrightarrow log_{10}0.1 = -1$

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि

10 तथा 100 के बीच की संख्या का (आधार 10 पर) लघुगणक 1 तथा 2 के बीच की संख्या होगी। **अर्थात 1 + एक दशमलव संख्या**

इसी प्रकार 100 और 1000 के बीच की संख्या का (आधार 10 पर) लघुगणक 2 तथा 3 के बीच की संख्या होगी। अर्थात **2 + एक दशमलव संख्या**

तथा 0.1 एवं 1 के बीच एक संख्या का (आधार 10 पर) लघुगणक -1 तथा 0 के बीच की संख्या होगी। अर्थात **- 1 + एक दशमलव संख्या**

शिक्षार्थियों से ज्ञात करायें 1 तथा 10 के बीच की किसी संख्या का लघुगणक (आधार 10 पर) 0 और 1 के बीच की संख्या होगी अर्थात् **0 + एक दशमलव संख्या**

अतः एक संख्या के लघुगणक के दो भाग होते हैं। इसमें एक पूर्णांक भाग जिसे पूर्णांश (*characteristics*) कहते हैं।

दूसरा भिन्नात्मक भाग जो धनात्मक होता है। इसे अपूर्णांश (*mantissa*) कहते हैं।

नोट - 1. पूर्णांश धनात्मक, शून्य या ऋणात्मक हो सकता है, किन्तु अपूर्णांश सदैव धनात्मक लिया जाता है।

2. संख्याओं का लघुगणक आधार 10 पर ज्ञात किया गया है, अतः जहाँ लघुगणक में आधार नहीं लिखा हो तो आधार 10 ही मानते हैं। सुविधा के लिए आधार नहीं लिखते हैं।

3. संख्याओं के एक ही क्रम व्यवस्थित विभिन्न संख्याओं के लघुगणक में अपूर्णांश समान होते हैं।

यथा - $\log 741 = 2.8698$

$\log 74.1 = 1.8698$

$\log 7.41 = 0.8698$

$\log 0.741 = \bar{1}.8698$

क्योंकि

$741 = 7.41 \times 10^{2}$

$74.1 = 7.41 \times 10^{1}$

$7.41 = 7.41 \times 10^{0}$

$0.741 = 7.41 \times 10^{-1}$

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि 1 से छोटी संख्याओं के लघुगणक में पूर्णांश ऋणात्मक होता है कि जबकि अपूर्णांश सदैव धनात्मक होता है ऐसी स्थिति में ऋण चिह्न (−) को पूर्णांक संख्या के ऊपर लिखते हैं जिसे 'बार' पढ़ते हैं।

संख्याओं का लघुगणक ज्ञात करना

पूर्णांश ज्ञात करना -

मानक रूप संख्या में 10 का जो घातांक होता है, वही उस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश होगा।

जैसे $\log (3.754 \times 10^{2})$ में पूर्णांश = 2

$\log (1.25 \times 10^{-1})$ में पूर्णांश = -1

अपूर्णांश ज्ञात करना -

अपूर्णांश ज्ञात करने हेतु लघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

शिक्षार्थियों से पुस्तक में छपी लघुगणक सारणी को ध्यान से देखने को कहें। उन्हें बतायें कि -

1. इस सारणी के प्रथम स्तम्भ में 10 से 99 तक दो अंकों वाली संख्या है जो पंक्ति निर्धारित करती है।
2. बाद के प्रत्येक स्तम्भ के ऊपरी भाग पर 0 से 9 तक एक अंकीय संख्या है। इससे दायीं ओर औसत अन्तर (*Mean differences*) का खण्ड है, जिसमें 1 से 9 तक के स्तम्भ हैं।
3. किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश ज्ञात करने हेतु संख्या के प्रथम दो अंकों (जिसमें पहला अंक शून्य न हो) की पंक्ति देखते हैं। इस पंक्ति में तीसरे अंक वाले स्तम्भ से संख्या लिख लेते हैं। इस संख्या में चौथे अंक के औसत अन्तर स्तम्भ से प्राप्त संख्या का योग अपूर्णांश होता है।

उदाहरण - लघुगणक सारणी की सहायता से 45.32 का लघुगणक ज्ञात करना।

हल - 45.32 का मानक रूप $= 4.532 \times 10^1$

$log_{10}45.32$ का पूर्णांश $= 1$

लघुगणक सारणी की सहायता से 45 की पंक्ति का स्तम्भ 3 पर अंकित संख्या = 6561

औसत अन्तर स्तम्भ 2 से संख्या = 2

योगफल = 6561 + 2 = 6563

अपूर्णांश = .6563

अतः $log\,45.32 = 1.6563$

नोट :

- शिक्षार्थियों को बोध करायें कि यदि किसी संख्या में केवल एक अंक हो तो इसे तीन अंकों तक लिख लेते हैं। यथा 2 को 2.00।
- शिक्षार्थियों को बोध करायें कि अपूर्णांश ज्ञात करने में संख्या के केवल चार अंकों का ही प्रयोग होता है। अधिक अंक होने पर संख्या का चौथे अंक तक निकटतम मान ज्ञात करते हैं।

  जैसे 1.1368 को 1.137 तथा 1.1362 को 1.136
- शिक्षार्थियों को बोध करायें कि लघुगणक सारणी में 10 से 19 की पंक्ति में औसत अन्तर स्तम्भ में दो-दो पंक्ति दी गयी हैं। तीसरे स्थान के अंक 0 से 4 तक के स्तम्भ में संख्याओं को पंक्ति से कुछ ऊपर लिखा गया है। इसलिए आवश्यकता पड़ने पर औसत अन्तर के स्तम्भ में ऊपर वाली संख्या ली जायेगी।

किन्तु 5 से 9 तक के स्तम्भ में संख्याओं को नीचे लिखा गया है। इसलिए आवश्यकता पड़ने पर औसत अन्तर के स्तम्भ से नीचे वाली संख्या जोड़ने हेतु ली जायेगी।

प्रतिलघुगणक (*Antilogarithms*)

यदि $log\,x = y$ तो x को y का प्रतिलघुगणक कहते हैं। पुस्तक में दी गयी प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग लघुगणक सारणी की तरह करते हैं। प्रतिलघुगणक सारणी में पहले स्तम्भ की संख्या में दशमलव चिह्न लगा होता है और संख्याएँ .00 से .99 तक की पंक्तियाँ दी गयी हैं।

यदि $log\,n = 2.4571$ तो संख्या n ज्ञात करना।

शिक्षार्थी n ज्ञात होने पर $log\ n$ ज्ञात करना सीख चुके हैं। अब उन्हें बोध कराये कि $log\ n$ ज्ञात हो तो n ज्ञात करने के लिए प्रतिलघुगणक *(Antilog)* ज्ञात करते हैं। इसके लिए प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि,

किसी संख्या के लघुगणक में अपूर्णांश उस संख्या के अंकों के क्रम पर निर्भर करता है, अतः अपूर्णांश की सहायता से पहले संख्या के अंकों को क्रम में ज्ञात कर लेते हैं। पूर्णांश के आधार पर दशमलव चिह्न लगा कर पूर्णांकों की संख्या निर्धारित करते हैं।

इसमें $log\ n$ का अपूर्णांश = .4571

प्रति लघुगणक सारणी से .45 की पंक्ति के सामने स्तम्भ 7

की संख्या = 2864, औसत अन्तर के स्तम्भ 1 की संख्या = 1

योगफल = 2864 + 1 = 2565

$log\ n$ का पूर्णांश = 2

चूँकि लघुगणक की गणना के दौरान, संख्याओं के मानक रूप में दशमलव का स्थान एक अंक के बाद से शुरू होता है,

इसलिए 2865 में पूर्णांक भाग के 2 + 1 = 3 अंक होंगे।

अतः $n = 286.5$

संक्षेप में, यदि $log\ n = 2.4571$ तो

$n = Antilog\ 2.4571$

$= 286.5$

शिक्षार्थियों को प्रतिलघुगणक सारणी के प्रयोग का अभ्यास कराया जाय। उन्हें सचेष्ट करें कि लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी देखने में सावधानी रखें।

लघुगणकों के नियम (*Law of Logarithms*)

शिक्षार्थी घातांकों के नियम से परिचित हैं। लघुगणक घातों को व्यक्त करने का दूसरा ढंग है। अतः घाताकों का नियम लघुगणकों में लागू होते हैं।

प्रथम नियम

यदि $a^x = m$ तो $log_a m = x$

पुनः $a^y = n$ तो $log_a n = y$

$a^x \times a^y = m.n$ (m, n धन पूर्णांक हैं)

पुनः घातांक नियम (1) से

$$a^x \times a^y = a^{x+y} = m.n$$

लघुगणक के रूप में $log_a m\ n = x + y = log_a m + log_a n$ (का मान रखने पर)

अतः $$\boldsymbol{log_a m\ n = log_a m + log_a n}$$

शिक्षार्थियों से निष्कर्ष निकलवाएँ कि

$$log_a m\ n\ p = log_a m + log_a n + log_a p$$

द्वितीय नियम :

यदि $a^x = m$ तो $log_a m = x$

पुनः $a^y = n$ तो $log_a n = y$

$\frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n}$ (जहाँ m, n दो धनपूर्णांक हैं, तथा $n \neq 0$)

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{m}{n}$ (घातांक नियम 2 से)

लघुगणक रूप में $\log_a \frac{m}{n} = x-y = \log_a m - \log_a n$ (x, y का मान रखने पर)

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

इसी प्रकार $\log_a \left(\frac{m}{np}\right) = \log_a m - \log_a n - \log_a p$

तृतीय नियम

$a^x = m$ तो $log_a m = x$

n कोई धनात्मक पूर्ण संख्या हो तो $(a^x)^n = m^n$ (घातांक नियम 3 से)

लघुगणक रूप में, $log_a(m^n) = nx = n.\ log_a m$ (x का मान रखने पर)

$$\boldsymbol{log_a(m^n) = n.\ log_a m}$$

उदाहरण 1 - $\sqrt{12.35}$ का मान लघुगणक के प्रयोग से ज्ञात करना

हल - माना कि $x = \sqrt{12.35} = (12.35)^{\frac{1}{2}}$

(दोनों पक्षों का लेने पर)

$$\log x = \frac{1}{2}\log 12.35$$

$$= \frac{1}{2} \times (1.0917)$$

$= \quad 0.54585 \sim 0.5459$

$= \quad 0.5459 \times 10^0$

$x = \quad Antilog\ 0.5459 \times 10^0$

$= \quad 3.515$ (लगभग)

उदाहरण - $\frac{2.7}{11.3}$ को लघुगणक की सहायता से हल करना।

हल - माना कि $x = \frac{2.7}{11.3}$

$\log x = \log 2.7 - \log 11.3$

$= 0.4314 - 1.0531$

$= -0.6217$

$= -1 + (1 - .6217)$

$= \bar{1}.3783$

$x = Antilog\ \bar{1}.3783$

$= 0.2390$ (लगभग)

घटाने की दूसरी विधि

$$\begin{array}{r} 0.4314 \\ -\ 1.0531 \\ \hline \bar{1}.3783 \end{array}$$

उदाहरण 3 - $\frac{2 \times 3 \times 5}{7}$ का मान लघुगणक द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल - $\log \frac{2 \times 3 \times 5}{7} = \log 2 + \log 3 + \log 5 - \log 7$

$= 0.3010 + 0.4771 + 0.6990 - 0.8451$

$= 1.4771 - 0.8451$

$= 0.6320 \quad = \quad 0.6320 \times 10^0$

$\frac{2 \times 3 \times 5}{7} = Antilog\ 0.6320 \times 10^0$

$= 4.285$

मूल्यांकन

1. निम्नांकित को लघुगणक के रूप में लिखिए

(i) $5^4 = 625$ (ii) $10^3 = 1000$

(iii) $4^{-2} = \frac{1}{16}$ (iv) $10^{-2} = 0.01$

2. निम्नांकित को घातांक रूप में लिखिए -

(i) $\log_2 64 = 6$ (ii) $\log_2 25 = 2$

(iii) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ (iv) $\log_{10}(0.001) = 3$

3. लघुगणक ज्ञात कीजिए

अ. 64 का आधार 8 पर ब. 0.1 का आधार 10 पर

स. $\frac{1}{216}$ का आधार 6 पर द. 27 का आधार 3 पर

4. निम्नलिखित में प्रत्येक संख्या को मानक रूप में लिखिए -

अ. 32.75 ब. 427.2 स. 0.0254 द. 0.357

5. निम्नांकित का पूर्णांश ज्ञात कीजिए

(i) $\log 37.35$ (ii) $\log 4176.2$ (iii) $\log 0.012$ (iv) $\log 0.0057$

6. लघुगणक सारणी की सहायता से $\log 23.35$ का अपूर्णांश ज्ञात कीजिए।

7. $\log 30$ का मान $\log 2, \log 3, \log 5$ द्वारा व्यक्त कीजिए।

8. सिद्ध कीजिए $\log \frac{25}{24} = 2\log 5 - 3\log 7 - \log 3$

9. सिद्ध कीजिए $\log(2+3+4) = 2\log 3$

10. लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग कर 3.756 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

11. लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी का का प्रयोग कर निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए -

$$\frac{3.75 \times 0.416}{2.75 \times 0.02 \times 9.07}$$

12. लघुगणक की सहायता से 10 का घनमूल ज्ञात कीजिए -

उत्तरमाला

1. (i) $\log 625 = 4$; (ii) $\log_{10} 1000 = 3$; (iii) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$; (iv) $\log_{10} 0.01 = -2$

2. (i) $2^6 = 64$; (ii) $5^2 = 25$; (iii) $3^{-3} = \frac{1}{27}$ (iv) $10^{-3} = 0.001$; 3. (i) 2 ; (ii) - 1 (iii) -3 ; (iv) 3

4. (i) 3.275×10^1 (ii) 4.272×10^2 ; (iii) 2.54×10^{-2} ; (iv) 3.57×10^{-1} ; 5. (i) 1 ; (ii) 3 ; (iii) $\bar{2}$

(iv) $\bar{3}$; 6. 0.3683 ; 7. $\log 2 + \log 3 + \log 5$; 10. 1.554 ; 11. 3.127 ; 12. 2.154

अध्याय 4 - लघुगणकीय सारणियों का अनुप्रयोग

उद्देश्य

- शिक्षार्थियों में लघुगणकीय सारणियों के प्रयोग की दक्षता विकसित करना।
- शिक्षार्थियों में लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग कर चक्रवृद्धि ब्याज, जनसंख्या वृद्धि, वस्तुओं का अवमूल्यन (मूल्य ह्रास), क्षेत्रमिति आदि से संबंधित प्रश्नों को हल करने की क्षमता विकसित करना।

शिक्षण-बिन्दु

- लघुगणकीय सारणियों का प्रयोग कर अभिकलन चक्रवृद्धि ब्याज, जनसंख्या वृद्धि, वस्तुओं का मूल्य ह्रास।
- आयत, वर्ग, त्रिभुज, समचतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज एवं समान्तर चतुर्भुज आदि का क्षेत्रफल ज्ञात करने में लघुगणक का प्रयोग।

लघुगणकीय सारणियों का प्रयोग कर अभिकलन

चक्रवृद्धि ब्याज

शिक्षार्थी जानते हैं कि ऋण लेने पर, ऋण देने वाली संस्था ब्याज पर भी ब्याज लेती है जिसे चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

इसको निम्नांकित सूत्र की सहायता से ज्ञात करते हैं -

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

जहाँ A = मिश्रधन, P = मूलधन, r = दर, n = समय,

चक्रवृद्धि ब्याज = A - P

नोट - ब्याज छमाही देय होने पर $r = \frac{\text{वार्षिक दर}}{2}$ तथा $n = 2$ वर्ष (छमाही)

ब्याज तिमाही देय होने पर $r = \frac{\text{वार्षिक दर}}{4}$ तथा $n = 4$ वर्ष (तिमाही)

n का मान 2 से अधिक अथवा भिन्न में होने पर लघुगणक के प्रयोग से अभिकलन सरल हो जाता है।

उदाहरण 1 - ₹ 4500 का 10.5 वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 5 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करना।

हल - $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

यहाँ पर $P = 4500, r = 10.5, n = 5$

$$A = 4500\left(1+\frac{10.5}{100}\right)^5$$

$$= 4500\ (1.105)^5$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$\log A = \log 4500 + 5 \log 1.105$

$= 3.6532 + 5 \times (0.0434)$ (लघुगणक सारणी हो)

$= 3.6532 + 0.2170$

$= 3.8702$

$A = Antilog\ (3.8702)$ (प्रति लघुगणक सारणी से)

$= 7416$

चक्रवृद्धि ब्याज $= A - P = 7416 - 4500 = 2916$

अभीष्ट चक्रवृद्धि ब्याज = ₹ 2916 (लगभग)

उदाहरण 2. कितने समय में कोई धन 10% चक्रवृद्धि व्याज की दर से अपने से दो गुना हो जायेगा ? (दिया है $\log 2 = 0.3010, \log 11 = 1.0414$)

हल - माना कि धन $= P$ तो मिश्रधन $A = 2P, r = 10, n = ?$

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$2P = P\left(1+\frac{10}{100}\right)^n$$

$$2 = \left(\frac{11}{10}\right)^n$$

दोनों पक्षों का $\log$ लेने पर

$\log 2 = n\ (\log 11 - \log 10)$

$0.3010 = n\ (1.0414 - 1)$

$0.3010 = n \times 0.0414$

$$n = \frac{0.3010}{0.0414} = \frac{3010}{414}$$

$= 7.27$ वर्ष (लगभग)

जनसंख्या वृद्धि *(Population Growth)*

यदि किसी नगर की जनसंख्या किसी निश्चित प्रतिशत दर से बढ़ रही है, तो निश्चित समय *(n)* के पश्चात् नगर की जनसंख्या निम्न सूत्र से ज्ञात की जाती है :

n वर्ष बाद जनसंख्या = वर्तमान जनसंख्या $\left(1+\frac{\text{वृद्धिदर}}{100}\right)^n$

उदाहरण - एक गाँव की जनसंख्या इस समय 4000 है। उस गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष 2.2% बढ़ रही है। 5 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या कितनी हो जायेगी ?

हल - n वर्ष बाद जनसंख्या = वर्तमान जनसंख्या $\left(1+\frac{\text{वृद्धिदर}}{100}\right)^n$

यहाँ $n = 5$ वर्तमान, जनसंख्या = 4000 वृद्धि पर = 2.2

माना कि 5 वर्ष बाद उस गाँव की जनसंख्या = x

$$x = 4000\left(1+\frac{2.2}{100}\right)^5$$

$= 4000\ (1 + 0.022)^5$

$= 4000\ (1.022)^5$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर -

$\log x = \log 4000 + 5 \log 1.022$

$= 3.6021 + 5 \times 0.0095$(लघुगणक सारणी के प्रयोग से)

$= 3.6021 + 0.0475$

$= 3.6496$

$x = Antilog\ 3.6496$

$= 4463$ (लगभग)(प्रतिलघुगणक सारणी से)

5 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या = 4463 (लगभग)

नोट - यदि जनसंख्या घट रही हो तो -

n वर्ष बाद जनसंख्या = वर्तमान जनसंख्या $\left(1-\frac{\text{कमी दर}}{100}\right)^n$

वस्तुओं का मूल्य ह्रास *(Depreciation of value)*

पुरानी वस्तुओं अथवा मशीनों के मूल्य समय के साथ-साथ घटता रहता है। समय के साथ मूल्य में आने वाली यह कमी मूल्य ह्रास कहलाती है। इसे अवमूल्यन भी कहते हैं।

यदि वस्तु का प्रारम्भिक मूल्य v_0, मूल्य ह्रास की दर = $r\%$ वार्षिक t वर्षों के बाद वस्तु का मूल्य v_t

$$v_t = v_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^t$$

उदाहरण - एक मोटर साइकिल का मूल्य ₹ 60,000 है। इसके मूल्य में प्रतिवर्ष 5% अवमूल्यन हो रहा है। 5 वर्ष बाद इस मोटर साइकिल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल - $v_t = v_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^t$

जहाँ $v_0 = 60{,}000,\ t = 5,\ r = 5$

$$v_t = 60000\left(1-\frac{5}{100}\right)^5$$

$= 60{,}000\ (1-0.05)^5$

$= 60{,}000\ (0.95)^5$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$\log v_t = \log 60{,}000 + 5 \log (0.95)$ (लघु सारणी के प्रयोग से)

$= 4.7782 + 5 \times (\bar{1}.9777)$ $\{5\times\bar{1}.9777 = 5\times(-1)+5\times.9777$

$= 4.7782 + (\bar{1}.8885)$ $= -5+4.8885 = \bar{1}.8885\}$

$= 4.6667$

$v_t = \text{Antilog } 4.6667$

= ₹ *46410* (लगभग)

5 वर्ष बाद उस मोटर साइकिल का मूल्य = ₹ *46410*

क्षेत्रमिति *(Mensuration)*

शिक्षक इस बात की सुनिश्चित करें कि छात्रों को क्षेत्रफल की समझ है।

आयत का क्षेत्रफल

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= l\,.\,b$ जहाँ l = लम्बाई, b = चौड़ाई

आयत का विकर्ण = $\sqrt{(\text{ल0})^2 + (\text{चौ0})^2}$

$= \sqrt{l^2 + b^2}$

आयत का परिमाप = 2 (ल0 + चौ0)

$= (l + b)$

उदाहरण - एक आयताकार बाग का क्षेत्रफल 1.4 हेक्टेअर हैं। इसकी भुजाओं में 5 : 4 का अनुपात है। बाग का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल - बाग की लम्बाई एवं चौड़ाई में अनुपात = 5 : 4

माना कि बाग की लम्बाई = $5x$ मी तथा चौड़ाई = $4x$ मी

आयताकार बाग का क्षेत्रफल = ल0 × चौ0

$= 5x \times 4x$ वर्ग मीटर

$= 20x^2$ वर्ग मीटर

बाग का क्षे0 = 1.4 हेक्टेअर = 1.4 × 10000 वर्ग मी

= 14000 वर्ग मी

$20\,x^2 = 14000$

$x^2 = \frac{14000}{20} = 700$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$2 \log x = \log 700$

$= 2.8451$ (लघुगणक सारणी से)

$\log x = 1.42255 \approx 1.4226$

$x = Antilog\ 1.4226$

$= 26.46$ (प्रतिलघुगणक सारणी से)

बाग की ल0 $= 5x = 5 \times 26.46 = 132.30$ मी (लगभग)

बाग की चौ0 $= 4x = 4 \times 26.46 = 105.84$ मी (लगभग)

बाग का परिमाप = 2(ल0+चौ0)

= 2(132.30 + 105.84) मी0

= 2 × 238.14 मी0

= 476.28 मी0 (लगभग)

वर्ग का क्षेत्रफल

शिक्षार्थी पढ़ चुके हैं कि -

वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2

= a^2 (जहाँ a वर्ग की भुजा है।)

वर्ग का विकर्ण = $a\sqrt{2}$

वर्ग का परिमाप = $4a$

उदाहरण - एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 1753 वर्ग मीटर है। मैदान का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल - वर्ग का क्षे0 = a^2 जहाँ a वर्ग की भुजा है।

$a^2 = 1753$

$a = (1753)^{\frac{1}{2}}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$log\ a = \frac{1}{2}\ log\ 1753$$

$= \frac{1}{2} \times 3.2438$ (लघुगणक सारणी से)

$= 1.6219$

$= 41.87$ (प्रतिलघुगणक सारणी है)

मैदान का परिमाप = $4 \times a$ = 4 × 41.87 मी0

= 167.48 मी0 (लगभग)

त्रिभुज का क्षेत्रफल

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई = $\frac{1}{2}\ a\,h$

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ भुजा^{2} = $\frac{\sqrt{3}}{4}\ a^2$

त्रिभुज का क्षेत्रफल (जब तीनों भुजाओं की माप दी हो) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$

उदाहरण 1 - एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा की माप 7 सेमी हो।

हल - समबाहु त्रिभुज का क्षेत्र0 $A = \frac{\sqrt{3} \times a^2}{4}$ जहाँ $a = 7$ सेमी

$$A = \frac{\sqrt{3} \times 7^2}{4} = \frac{(3)^{1/2} \times 7^2}{4}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log A = \frac{1}{2} \log 3 + 2 \log 7 - \log 4$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.4771 + 2 \times 0.8451 - 0.6021$$

$$\log A = 0.23855 + 1.6902 - 0.6021$$

$$= 0.23855 + 1.0881 \qquad (0.23855 \sim 0.2386)$$

$$= 1.32665 \quad = 1.3267$$

$$A = \text{Antilog } 1.3267$$

$= 21.21$ सेमी^{2}

उदाहरण 2 - एक त्रिभुज जिसकी भुजाएँ क्रमशः 6 सेमी, 7 सेमी व 8 सेमी लम्बाई की है। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

हल - $a = 6$ सेमी, $b = 7$ सेमी, $c = 8$ सेमी

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{(6+7+8)}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$ सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$
$$= \sqrt{10.5\,(10.5-6)\,(10.5-7)\,(10.5-8)}$$
$$= \sqrt{10.5 \times 4.5 \times 3.5 \times 2.5}$$

$$= (10.5 \times 4.5 \times 3.5 \times 2.5)^{\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log A = \frac{1}{2} (\log 10.5 + \log 4.5 + \log 3.5 + \log 2.5)$$

$= \frac{1}{2}(1.0212 + 0.6532 + 0.5441 + 0.3979)$

$= \frac{1}{2}(2.6164) = \quad 1.3082$

$A = Antilog\ 1.3082 \quad = 20.33$ सेमी^{2} (लगभग)

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल

$$A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$

जहाँ d_1, d_2 समचतुर्भुज के विकर्ण हैं।

समचतुर्भुज की भुजा = $\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$

नोट - समचतुर्भुज का विकर्ण ज्ञात होने पर, क्षेत्रफल की गणना सरलता से की जा सकती है।

उदाहरण 1 - एक समचतुर्भुज के विकर्णों की माप क्रमशः 163 मी व 95 मी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करना।

हल - समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$

जहाँ $d_1 = 163$ मी0, $d_2 = 95$ मी0

$$A = \frac{1}{2} \times 163 \times 95$$

$= 0.5 \times 163 \times 95$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$log\ A = log\ 0.5 + log\ 163 + log\ 95$

$= \bar{1}.6990 + 2.2122 + 1.9777$

$= 3.8889$

$A = Antilog\ 3.8889$

$= 7743$

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 7743मी^{2} (लगभग)

उदाहरण 2 - एक समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 25 सेमी तथा 15 सेमी माप के हैं। समचतुर्भुज की भुजा की माप ज्ञात करना।

हल - समचतुर्भुज की भुजा $= \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$

जहाँ $d_1 = 25$ सेमी $d_2 = 15$ सेमी

$$x = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{625}{4} + \frac{225}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{850}{4}} \quad = \quad \left(\frac{850}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों का *log* लेने पर

$$\log x = \frac{1}{2}\ (\log 850 - \log 4)$$

$$= \frac{1}{2}(2.9294 - 0.6021)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2.3273 = 1.16365 \approx 1.1637$$

$x = Antilog\ 1.1637$

$= 14.57$ सेमी (लगभग)

समलम्ब चतुर्भुज

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$(समान्तर भुजाओं का योग) × उनके बीच की दूरी

उदाहरण - एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ क्रमशः 11.7 सेमी व 18.6 सेमी माप की हैं। इनके बीच की दूरी 6.5 सेमी है। इस समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

हल - समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$(समान्तर भुजाओं का योग) × उनके बीच की दूरी

$= \frac{1}{2}(11.7 + 18.6) \times 6.5$

$= \frac{1}{2} \times 30.3 \times 6.5$

$= 0.5 \times 30.3 \times 6.5$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$\log A = \log 0.5 + \log 30.3 + \log 6.5$

$= \bar{1}.6990 + 1.4814 + 0.8129$

$= 1.9933$

$A = \text{Antilog } 1.9933$

$= 98.47$

अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 98.47 सेमी^{2} (लगभग)

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = एक भुजा की लम्बाई × इस भुजा के समान्तर भुजा से लम्बवत् दूरी

उदाहरण - एक मैदान जो समान्तर चतुर्भुज के आकार का है जिसकी आसन्न भुजाएँ 23 मी तथा 17 मी की हैं। इसके एक विकर्ण की माप 16 मी है। छोटे शीर्ष लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना।

हल - Δ PQR का क्षेत्रफल ज्ञात कर PT ज्ञात किया जायेगा।

Δ PQR का क्षेत्रफल $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{23+17+18}{2}$

$= \frac{58}{2} = 29$

Δ PQR का क्षेत्रफल

$A = \sqrt{29(29-23)(29-17)(29-18)}$

$= \sqrt{29 \times 6 \times 12 \times 11}$

$= (29 \times 6 \times 12 \times 11)^{\frac{1}{2}}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$\log A = \frac{1}{2}(\log 29 + \log 6 + \log 12 + \log 11)$

$$= \frac{1}{2}(1.4624 + 0.7782 + 1.0792 + 1.0414)$$

$$= \frac{1}{2} \times (4.3612)$$

$$= 2.1806$$

$$A = \text{Antilog}2.1806$$

$$= 151.6$$

Δ PQR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times QR \times PT$

$$PT = \frac{2 \times \Delta PQR \text{ का क्षे0}}{QR}$$

$$h = \frac{2 \times 151.6}{23} \qquad [PT = h]$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log h = \log 2 + \log 151.6 - \log 23$$

$$= 0.3010 + 2.1807 - 1.3617$$

$$= 2.4817 - 1.3617$$

$$= 1.1200$$

$$h = \text{Antilog } 1.1200$$

= 13.18 मी (लगभग)

शीर्ष लम्ब की लम्बाई = 13.18 मी0

मूल्यांकन

लघुगणक की सहायता से ज्ञात कीजिए -

1. ₹ 2300 का 8% वार्षिक ब्याज की दर से 4 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. कितना धन 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 15 वर्षों में ₹ 3600 हो जायेगा।
3. कितने वर्ष में 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ₹ 500 का मिश्रध ₹ 630.50 हो जायेगा ?
4. किसी शहर की जनसंख्या प्रति वर्ष 5% बढ़ जाती है। यदि इस समय शहर की जनसंख्या 100000 हो तो 3 वर्ष बाद उस शहर की जनसंख्या कितनी हो जायेगी ?
5. एक नगर की जनसंख्या 4% प्रतिवर्ष की दर से घट रही है। यदि नगर की वर्तमान जनसंख्या 60,000 है तो 2 वर्ष बाद उस नगर की जनसंख्या क्या होगी ?

6. एक स्कूटर के मूल्य में प्रतिवर्ष 6% का अवमूल्यन हो रहा है। यदि एक स्कूटर वर्ष 2007 में ₹ 35000 में खरीदा गया था, तो वर्ष 2012 में उसका मूल्य कितना होगा ?

7. एक मशीन ₹ 15000 में खरीदी गयी। इसका अवमूल्यन (मूल्य का ह्रास) प्रतिवर्ष 8% की दर से हो रहा है, तो 4 वर्ष बाद उस मशीन का मूल्य कितना होगा ?

8. एक आयत की संलग्न भुजाएँ क्रमशः 23.7 सेमी तथा 16.8 सेमी भी हैं। आयत का क्षेत्रफल कितना होगा ?

9. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 30.4 सेमी लम्बी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

10. एक त्रिभुज की भुजाएँ 20 सेमी, 21 सेमी और 22 सेमी की हैं। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. एक समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 21 सेमी व 30 सेमी के हैं। उस समचतुर्भुज की भुजा की माप ज्ञात कीजिए।

12. एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ 11.6 सेमी और 19.8 सेमी की हैं। इनके बीच की दूरी 6.2 सेमी है। इस समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13. एक समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं की माप 31 सेमी व 23 सेमी हैं तथा इसके एक विकर्ण की लम्बाई 19 सेमी है। इसके छोटे शीर्ष लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

1. ₹ 828 2. ₹ 1731 3 2.43 वर्ष 4. 115800 5. 55310 6. ₹ 25680

7. ₹ 10750 8. 398.1 सेमी^{2} 9. 400.2 सेमी^{2} 10. 171.4 सेमी^{2}

11. 18.31 सेमी 12. 97.34 सेमी^{2} 13. 14.05 सेमी

इकाई -2 त्रिकोणमिति

अध्याय 5 त्रिकोणमितीय अनुपात

उद्देश्य

- त्रिकोणमिति का अर्थ समझ सकेंगे।
- त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान प्राप्त कर सकेंगे।
- त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच सम्बन्ध ज्ञात कर सकेंगे।
- किसी एक त्रिकोणमितीय अनुपात के ज्ञात होने पर दिये गये त्रिकोणमितीय व्यंजक का मान ज्ञात कर सकेंगे।

शिक्षण बिन्दु

- त्रिकोणमिति का अर्थ एवं संक्षिप्त इतिहास
- किसी समकोण त्रिभुज में किसी न्यूनकोण के त्रिकोणमितीय अनुपात
- त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच सम्बन्ध
- किसी त्रिकोणमितीय अनुपात के ज्ञात होने पर त्रिकोणमितीय व्यंजकों के मान ज्ञात करना।

सरल निरूपण

त्रिकोणमिति का अर्थ एवं संक्षिप्त इतिहास

शिक्षार्थियों में विषय के प्रति सुरुचि उत्पन्न करने के लिए आप सर्वप्रथम उन्हें त्रिकोणमिति का अर्थ समझायें तथा इसके संक्षिप्त इतिहास से भी उन्हें परिचित करायें। आप यह भी स्पष्ट करें कि त्रिकोणमिति की उपयोगिता क्या है ? इन बातों को जानकर शिक्षार्थी गणित की इस नयी शाखा को रुचिपूर्वक पढ़ेंगे और समझेंगे।

त्रिभुज एवं त्रिभुज के छः अंगों (तीन भुजाएँ और तीन कोण) के विषय में शिक्षार्थी जानते हैं। तीन भुजाओं की एक बन्द आकृति होने के कारण इसे त्रिभुज का नाम दिया गया है और तीन कोण होने के कारण त्रिभुज को त्रिकोण (*Triangle*) भी कहते हैं। शिक्षार्थी यह भी पढ़ चुके हैं कि समानकोणिक (समरूप) त्रिभुजों की किन्हीं दो संगत भुजाओं (चाहे उनके माप कुछ भी हों) का अनुपात सदैव समान होता है। त्रिकोणमिति में त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के पारस्परिक सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है।

सर्वप्रथम आप शिक्षार्थियों को बतायें कि त्रिकोणमिति किन दो शब्दों के योग से बना है। स्पष्ट है कि 'त्रिकोण' और 'मिति' के मेल से 'त्रिकोणमिति' शब्द बना है। जिसका अर्थ है 'त्रिभुज का मापन'। त्रिकोणमिति का इतिहास भी बड़ा मनोरंजक है। यूनान देश के महान् खगोल विज्ञानी भौतिक विद् और गणितज्ञ थेल्स (640 *B.C.*- 546 *B.C.*) त्रिभुजों की समरूपता की संकल्पना से प्राचीन मिश्र देश के एक पिरामिड की ऊँचाई का माप बिना उसे नापे ज्ञात कर मिश्रवासियों को आश्चर्यचकित कर दिया था। त्रिकोणमिति का जन्म थेल्स के इसी प्रयोग के साथ कदाचित हो चुका था। थेल्स ने दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं के बीच के अनुपात की सहायता से ही यह जटिल कार्य पूरा किया था, यद्यपि उस समय इस अनुपात को कोई नाम नहीं दिया गया था।

आप त्रिकोणमिति विषय की उपयोगिता के शिक्षार्थियों को अवगत करायें। आज त्रिकोणमिति की सहायता से अगम्य पर्वत शिखरों की ऊँचाइयाँ, अथाह समुद्र, नदी-नालों और दुर्गम घाटियों की गहराइयाँ, दो वस्तुओं के बीच की दूरियाँ सरलता से ज्ञात की जा सकती हैं।

किसी समकोण त्रिभुज में किसी न्यूनकोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

सर्वप्रथम आप किसी समकोण त्रिभुज में कोई न्यूनकोण को नामांकित करें तथा उसके सापेक्ष आप शिक्षार्थियों को समझायें कि उस समकोण त्रिभुज में कौन सी भुजा लंब कहलाती है, कौन सी भुजा आधार है और कौन सी भुजा कर्ण है। आइए, इसे चित्र की सहायता से समझें :

पार्श्वांकित चित्र में Δ OMP एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण OMP एक समकोण है। न्यूनकोण POM को ग्रीक भाषा के अक्षर θ (थीटा) द्वारा नामांकित किया गया है न्यूनकोण θ के सम्मुख भुजा को लंब, $\angle\theta$ की संलग्न भुजा OM को आधार और समकोण की सम्मुख भुजा को कर्ण कहते हैं। यदि समकोण Δ OMP का दूसरा न्यूनकोण $\angle$ OPM लें तो उसके संगत लम्ब OM होगा तथा आधार PM होगा। दोनों स्थितियों में कर्ण सदैव OP ही रहता है।

अब न्यूनकोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को निम्नवत् परिभाषित करते हैं।

i. $\sin\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{\angle\theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{PM}{OP}$

ii. $\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{\angle\theta \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{OM}{OP}$

iii. $\tan\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \dfrac{\angle\theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle\theta \text{ की संलग्न भुजा}} = \dfrac{PM}{OM}$

उपर्युक्त तीन अनुपातों के व्युत्क्रम अनुपात से तीन और त्रिकोणमितीय अनुपात प्राप्त होते हैं -

$$iv.\quad \cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{\angle\theta \text{ की संलग्न भुजा}}{\angle\theta \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{OM}{PM} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$v.\quad \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\text{कर्ण}}{\angle\theta \text{ की संलग्न भुजा}} = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$vi.\quad \cos ec\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{कर्ण}}{\angle\theta \text{ की संम्मुख भुजा}} = \frac{OP}{PM} = \frac{1}{\sin\theta}$$

शिक्षार्थियों का ध्यान निम्नांकित तथ्यों की ओर आकृष्ट करें तथा उनको बोध करायें -

sin θ, cos θ, tan θ, cot θ, sec θ और cosec θ क्रमशः sine θ, cosine θ, tangent θ, cotangent θ, secant θ और cosecant θ के संक्षिप्त रूप हैं।

sin θ का यह अर्थ कदापि नहीं कि sin और θ का गुणनफल sin θ है। अर्थात् $\sin\theta \neq \sin \times \theta$

इसी प्रकार $\cos\theta \neq \cos \times \theta$

$\tan\theta \neq \tan \times \theta$ इत्यादि

और प्रत्येक में पहला अक्षर अंग्रेजी वर्णमाला का छोटा अक्षर ही लिखा जाता है।

कोटिपूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

पार्श्वांकित चित्र में यदि

$\angle POM = \theta$ तो स्पष्टतः $\angle OPM = 90^0 - \theta$ होगा।

यह कोण भी न्यूनकोण होगा।

(शिक्षार्थियों से पूछें कि ऐसा क्यों ?)

ध्यान दें, $(90^0 - \theta)$ कोण θ का कोटिपूरक कोण कहलाता है।

अतः उपुर्यक्त समकोण त्रिभुज में,

(i) $\sin\angle OPM = \sin(90^0 - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$

(ii) $\cos\angle OPM = \cos(90^0 - \theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$

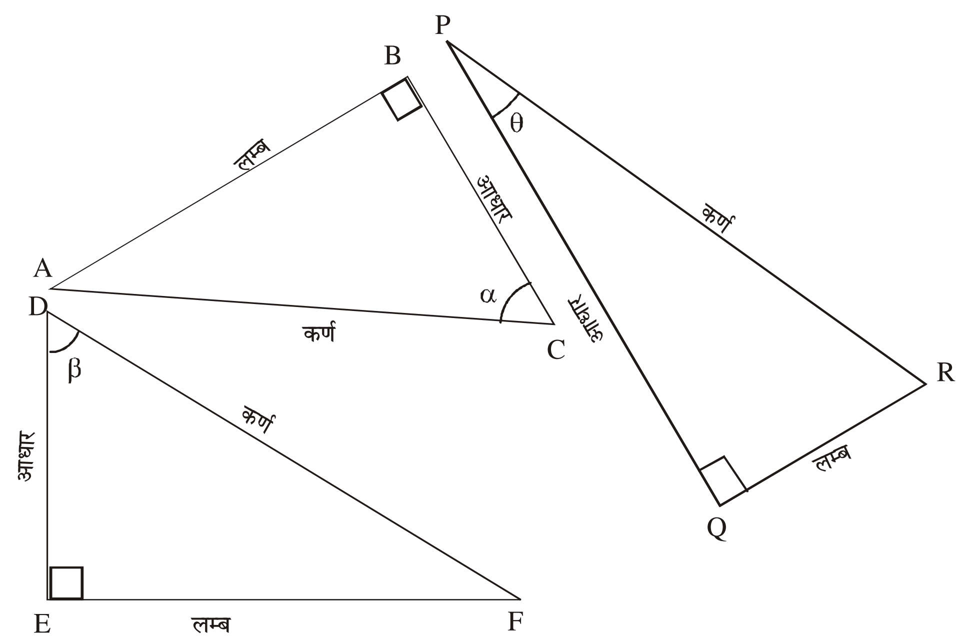
(iii) $\tan \angle OPM = \tan (90^0 - \theta) = \dfrac{OM}{PM} = \cot \theta$

(iv) $\cot \angle OPM = \cot (90^0 - \theta) = \dfrac{PM}{OM} = \tan \theta$

(v) $\sec \angle OPM = \sec (90^0 - \theta) = \dfrac{OP}{PM} = \text{cosec}\ \theta$

(vi) $\text{cosec} \angle OPM = \text{cosec} (90^0 - \theta) = \dfrac{OP}{OM} = \sec \theta$

आप शिक्षार्थियों को समझायें किसी तल में समकोण त्रिभुज की स्थिति चाहे जैसी भी हो, उसमें विचाराधीन न्यूनकोण की सम्मुख भुजा सदैव लंब और उसकी संलग्न भुजा सदैव आधार कहलाती है। यथा :



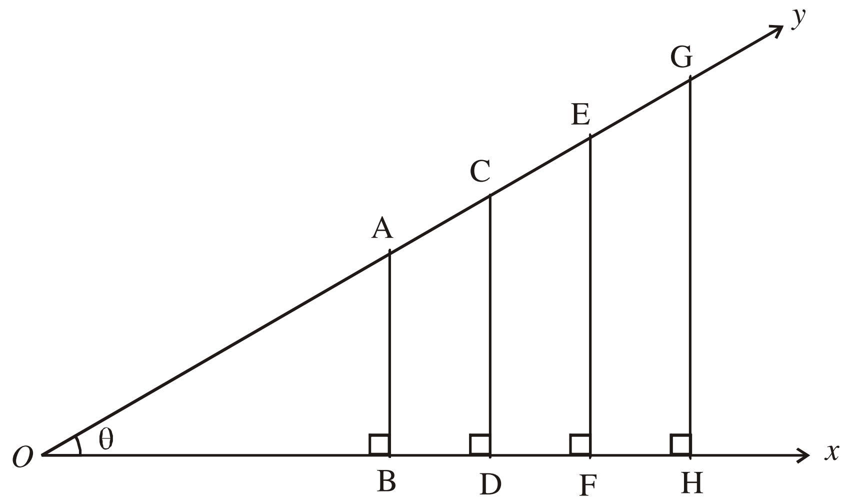
अभ्यास करायें

G heÙe¢ eá eÛ e$eeWceW **$\Delta$ ABC, Δ DEC और Δ PQR में $\angle\alpha$, $\angle\beta$ और $\angle\theta$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को परिभाषित कीजिए।**

उन्हीं चित्रों में $\angle(90^0 - \alpha)$, $\angle(90^0 - \beta)$ और $\angle(90^0 - \theta)$ की पहचान कीजिए और उन कोणों के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात कीजिए

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि सभी समरूप समकोण त्रिभुजों में आपस में बराबर न्यूनकोणों के सभी छः त्रिकोणमितीय अनुपात परस्पर बराबर होते हैं। इनके मान त्रिभुज की संगत भुजाओं की लम्बाइयों पर निर्भर नहीं करते,

बल्कि उस न्यूनकोण के अंशमाप पर निर्भर करते हैं। इस तथ्य को निम्नांकित चित्र में सरलता पूर्वक समझाया जा सकता है।



उपर्युक्त चित्र $\angle$ xoy में की माप θ मानी गयी है। स्पष्टतः चारों समकोण Δ OAB, Δ OCD, Δ OEF, और Δ OGH समरूप हैं अतः इनकी संगत भुजाओं के बीच के अनुपात आपस में बराबर हैं। अतः

$$\sin\theta = \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG}$$

$$\cos\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH}$$ इत्यादि।

त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच सम्बन्ध

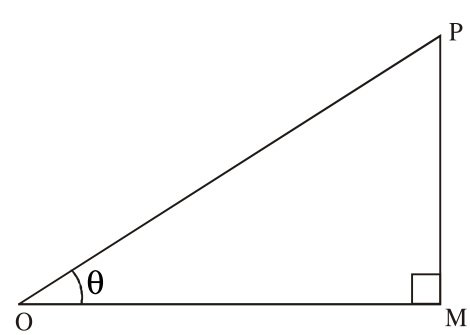
पार्श्वचित्र में समकोण Δ OMP में, $\angle$ POM = 90^0 तथा $\angle$ POM = θ है

शिक्षार्थी देख सकते हैं कि

1. $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$$

$$= \frac{PM}{OP} \times \frac{OP}{OM}$$

$$= \frac{PM}{OM}$$



अतः $$\boxed{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta}$$

2. पुनः $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\dfrac{OM}{OP}}{\dfrac{PM}{OP}}$

$= \dfrac{OM}{OP} \times \dfrac{OP}{PM}$

$= \dfrac{OM}{PM}$

$= \cot\theta$

अतः $\boxed{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta}$

अतः निष्कर्ष प्राप्त होता है :

किसी समकोण Δ में ∠ न्यूनकोण के लिए

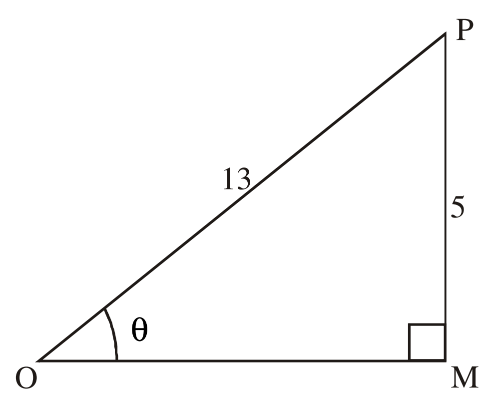
(i) $\tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (ii) $\cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

किसी त्रिकोणमितीय अनुपात के ज्ञात होने पर त्रिकोणमितीय व्यंजकों के मान ज्ञात करना

यदि किसी न्यूनकोण का छः त्रिकोणमितीय अनुपातों में से कोई एक अनुपात ज्ञात है तो पाइथागोरस के प्रमेय की सहायता से उस कोण के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किये जा सकते हैं। इसे एक उदाहरण लेकर समझाया जा सकता है।

उदाहरण 1 यदि $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ तो कोण θ के शेष पांच त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए

हल - पार्श्वचित्र में $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ से



θ

यदि PM = 5 तो OP = 13

अतः पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग से

समकोण त्रिभुज OMP में

$PM^2 + OM^2 = OP^2$

या $5^2 + OM^2 = 13^2$

या $OM^2 = 13^2 - 5^2$

$= \quad 169 - 25$

$= \quad 144$

अतः $OM = \sqrt{144}$

$= \quad 12$

अतः $\cos\theta = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{12}{13}$

$\tan\theta = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{5}{12}$

$\cot\theta = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{12}{5}$

$\sec\theta = \dfrac{OP}{OM} = \dfrac{13}{12}$

और $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{OP}{PM} = \dfrac{13}{5}$

हमने देखा कि किसी न्यूनकोण के किसी एक त्रिकोणमितीय अनुपात के ज्ञात होने पर शेष सभी अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किये जा सकते हैं। इसका अनुप्रयोग कर हम किसी भी त्रिकोणमितीय व्यंजक के मान सरलतापूर्वक ज्ञात कर सकते हैं।

इसे हम कुछ उदाहरणों द्वारा दर्शाते हैं :

उदाहरण 2 यदि $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ तो $3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल - दिया गया त्रिकोणमितीय व्यंजक $= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= 3\times\dfrac{1}{2} - 4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ ($\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ रखने पर)

$= \dfrac{3}{2} - 4\times\dfrac{1}{8}$

$= \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}$

$= 1$

उदाहरण 3 - यदि $\cot\theta = \dfrac{24}{7}$ तो $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - पार्श्वचित्र से $\cot\theta = \frac{24}{7}$

जहाँ $OM = 24$, और $PM = 7$

अतः $OP^2 = PM^2 + OM^2$

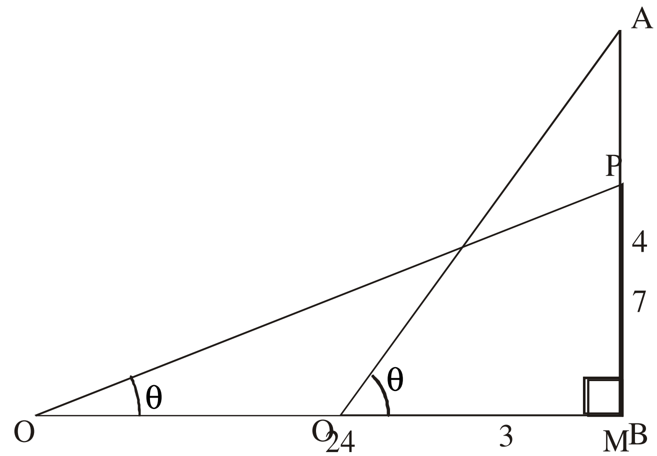
$= 7^2 + 24^2$

$= 49 + 576$

$= 625$

अतः $OP = \sqrt{625}$

$= 25$



अतः $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{7}{25}$

$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{24}{25}$

अतः $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\frac{7}{25} - \frac{24}{25}}{\frac{7}{25} + \frac{24}{25}}$

$= \frac{7-24}{7+24} = \frac{-17}{31}$

$= \frac{-17}{31}$

उदाहरण 4 - यदि $\tan\theta = \frac{4}{3}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{2\sin\theta + 3\cos\theta} = -\frac{1}{17}$

हल - दिया है $\tan\theta = \frac{4}{3}$

पार्श्वचित्र से यदि $OB = 3$

तो $AB = 4$

अतः $OA^2 = OB^2 + AB^2$

$= 3^2 + 4^2$

$= 9 + 16$

$= 25$

अतः $OA = \sqrt{25} = 5$

अतः $\sin\theta = \frac{4}{5}$ तथा $\cos\theta = \frac{3}{5}$

अतः $$\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{2\sin\theta + 3\cos\theta} = \frac{2\times\frac{4}{5} - 3\times\frac{3}{5}}{2\times\frac{4}{5} + 3\times\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{\frac{8}{5} - \frac{9}{5}}{\frac{8}{5} + \frac{9}{5}}$$

$$= \frac{8-9}{8+9}$$

$$= \frac{-1}{17}$$

$$= -\frac{1}{17}$$ अतः सिद्ध हुआ।

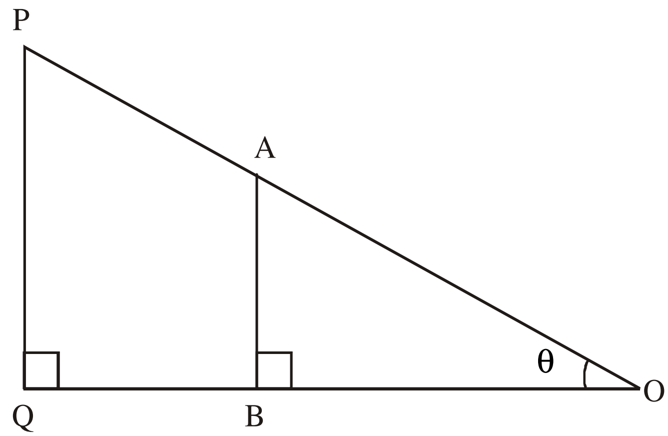
मूल्यांकन

- यदि $\sin\theta = \frac{7}{25}$ तो θ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।
- यदि $\tan\theta = \frac{8}{15}$ तो θ के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।
- यदि $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तो सिद्ध कीजिए कि $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 0$
- यदि $\cos A = \frac{4}{5}$ तो जाँच कीजिए कि $\frac{\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{\sin A}{\sec A}$
- यदि $\operatorname{cosec} A = 2$, तो $\left(\frac{1}{\tan A} + \frac{\sin A}{1+\cos A}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

विशेष : (अतिरिक्त जानकारी के लिए)

पार्श्वचित्र को देखिए। कल्पना कीजिए कि PQ एक मीनार है, जिसकी छाया समतल भूमि पर QO है। मीनार QO समतल भूमि पर लंबवत् खड़ी है अर्थात् $\angle PQO = 90^0$ ।

इस मीनार की ऊँचाई मापने के लिए एक ज्ञात ऊँचाई की छड़ी AB उसी समतल भूमि पर उर्ध्वाधरतः खड़ी की गई जिस पर मीनार खड़ी है। मान लीजिए कि छड़ी की छाया BO है। स्पष्टतः किसी समय विशेष पर छड़ी A के शिखर का उन्नतांश वही होगा जो मीनार PQ के शिखर का है।



अतः Δ PQO और Δ ABO दोनों ही समरूप समकोण त्रिभुज होंगे।

अतः $\frac{OQ}{PQ} = \frac{OB}{AB}$ (समरूप त्रिभुजों के गुण से)

अतः $PQ = \frac{OQ \times AB}{OB}$

यहाँ OQ, AB व OB सभी ज्ञात हैं, अतः PQ भी ज्ञात हो जायेगा।

महान गणितज्ञ थेल्स ने इसी प्रयोग द्वारा मिश्र की मीनार की ऊँचाई ज्ञात की थी।

अध्याय 6 विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

उद्देश्य

- ➲ विशेष कोणों की पहचान कर सकेंगे।
- ➲ विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कर सकेंगे।

शिक्षण बिन्दु

- ☛ 30^0, 45^0, 60^0 के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
- ☛ 0^0 और 90^0 के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
- ☛ $90^0 \pm \theta$ और $180^0 \pm \theta$ कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

सरल निरूपण

30^0, 45^0, 60^0 के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

शिक्षार्थी किसी समकोण त्रिभुज में किसी न्यून कोण θ के सभी छः त्रिकोणमितीय अनुपातों से अवगत हो चुके हैं। उन्हें व्यापक कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच के सम्बन्ध का ज्ञान भी हो चुका है। अब उन्हें θ के कुछ विशेष मानों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों को जानने-समझने की आवश्यकता है जिनका अनुप्रयोग ऊँचाई तथा दूरी के प्रश्नों मे ंकिया जाता है।

सर्वप्रथम शिक्षक शिक्षार्थियों को ज्यामितीय विधि से 30^0, 45^0, 60^0 के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना बतायें।

टिप्पणी : शिक्षार्थियों के ज्यामितीय उपकरणों में दो सेट स्क्वायर उपलब्ध होते हैं। जिनमें से एक में 30^0 और 60^0 के तथा दूसरे में 45^0 के कोण होते हैं।

30^0 और 60^0 के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना

पार्श्वचित्र में Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

शीर्ष A से आधार BC पर AD लम्ब खींचा गया है।

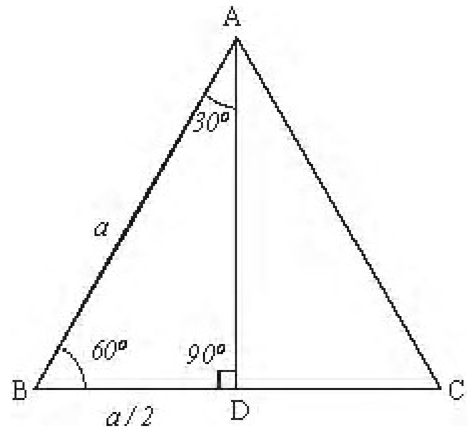
हम जानते हैं कि समबाहु Δ का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है और शीर्ष से आधार पर डाला गया लम्ब शीर्ष कोण को समद्विभाजित करता है।

अत: समकोण Δ ADB में

$\angle ADB = 90^0$,

$\angle ABD = 60^0$

और $\angle BAD = 30^0$



अब यदि समबाहु ΔABC की भुजा की लम्बाई a मात्रक मान ली जाय तो $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a = \frac{a}{2}$

अत: समकोण ΔADB में, पाइथागोरस के प्रमेय के प्रयोग से,

$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$

या $$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$= \frac{3a^2}{4}$$

अत: $$AD = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

अब समकोण ΔADB में

$$\sin 30^0 = \frac{\text{कोण } 30^0 \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BD}{AB}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{\text{कोण } 30^0 \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AD}{AB}$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} \qquad = \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^0 = \frac{\text{कोण } 30^0 \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } 30^0 \text{ की संलग्न भुजा}} \quad = \quad \frac{BD}{AD}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \qquad = \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\cot 30^0 = \dfrac{1}{\tan 30^0}$ *(क्योंकि cot 30⁰ और tan 30⁰ दोनों एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं)*

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30^0 = \frac{1}{\sin 30^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$= 2$

पुनः समकोण Δ ABD में

$$\sin 60^0 = \frac{\text{कोण } 60^0 \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} \quad = \quad \frac{AD}{AB}$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} \qquad = \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^0 = \frac{\text{कोण } 60^0 \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BD}{AB}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{a} \qquad = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^0 = \frac{\text{कोण } 60^0 \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } 60^0 \text{ की संलग्न भुजा}} = \frac{AD}{BD}$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} \qquad = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^0 = \frac{1}{\tan 60^0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0}$$

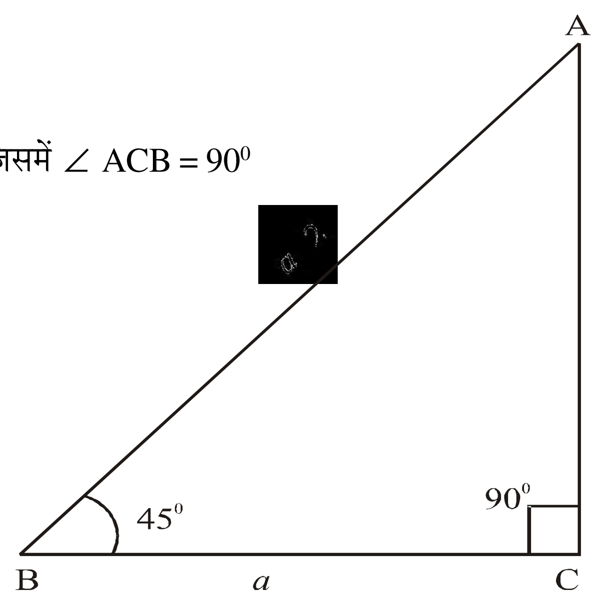
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \qquad = \quad 2$$

$$\cos ec 30^0 = \frac{1}{\sin 60^0}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

45^0 के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात



पार्श्वचित्र में ACB एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle$ ACB = 90^0

स्पष्टत : $\angle$ ABC = 45^0 = $\angle$ BAC

अब यदि भुजा BC की लम्बाई a मात्रक मान लें, तो

AC = BC $= a$ (समद्विबाहु Δ की बराबर भुजाएँ)

अब पाइथागोरस की प्रमेय से, समकोण Δ ACB में

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2$$

$$= 2a^2$$

अतः AB $= \sqrt{2a^2}$

$= a\sqrt{2}$

अब $\sin 45^0 = \dfrac{\text{कोण } 45^0 \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$

$= \dfrac{AC}{AB}$

$= \dfrac{a}{a\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^0 = \dfrac{\text{कोण } 45^0 \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$

$= \dfrac{BC}{AB}$

$= \dfrac{a}{a\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^0 = \dfrac{\text{कोण } 45^0 \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } 45^0 \text{ की संलग्न भुजा}}$

$= \dfrac{AC}{BC}$

$= \dfrac{a}{a}$

$= 1$

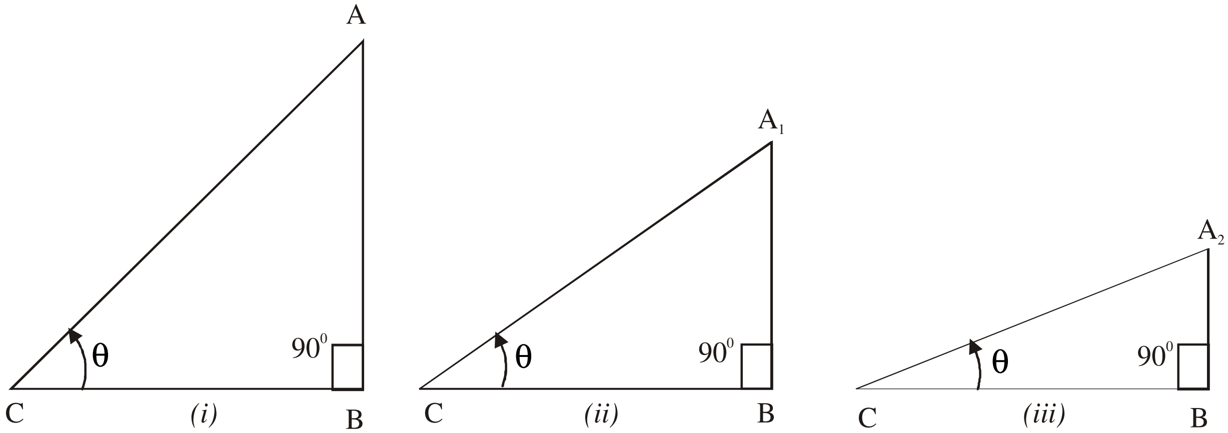
$\cot 45^0 = \dfrac{1}{\tan 45^0} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\sec 45^0 = \dfrac{1}{\cos 45^0} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

$\operatorname{cosec} 45^0 = \dfrac{1}{\sin 45^0} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

0^0 और 90^0 कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात :

निम्नांकित चित्रों को ध्यान से देखिए



G heÜeg̊eâ leerveeWeŠeYeøe mecekeâeÇe Δ हैं जिनमें $\angle B = 90^0$ तथा $\angle ACB = \theta$

कोण θ की सम्मुख भुजा AB तथा संलग्न भुजा CB है। शिक्षार्थियों से पूछिए कि उपर्युक्त चित्रों θ का अंशमाप मान क्रमशः जैसे-जैसे घट रहा है, वैसे लम्ब AB की लम्बाई घट रही है या बढ़ रही है ? शिक्षार्थी सोच समझ कर सही उत्तर अवश्य देंगे और वे बतायेंगे कि लम्ब की लम्बाई क्रमशः कम होती जा रही है $(AB > A_1B > A_2B)$। अब उनसे कल्पना करने, सोचने को प्रेरित करें कि θ का अंशमाप मान धीरे-धीरे घटते-घटते शून्य के अत्यन्त सन्निकट पहुँचने पर क्या होगा।

शिक्षार्थी समझ सकते हैं कि लम्ब की लम्बाई भी शून्य के सन्निकट पहुँच जायेगी।

अन्ततोगत्वा यह कल्पना की जा सकती है कि θ के 0^0 के बराबर होने पर लम्ब AB की लम्बाई भी शून्य हो जायेगी और उस दशा में बिन्दु A बिन्दु B पर पड़ जायेगा।

अतः $CA = CB$ हो जायेगा।

और तब $\sin 0^0 = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{0}{AC} = 0$

तथा $\cos 0^0 = \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{CB}{CB} = 1$

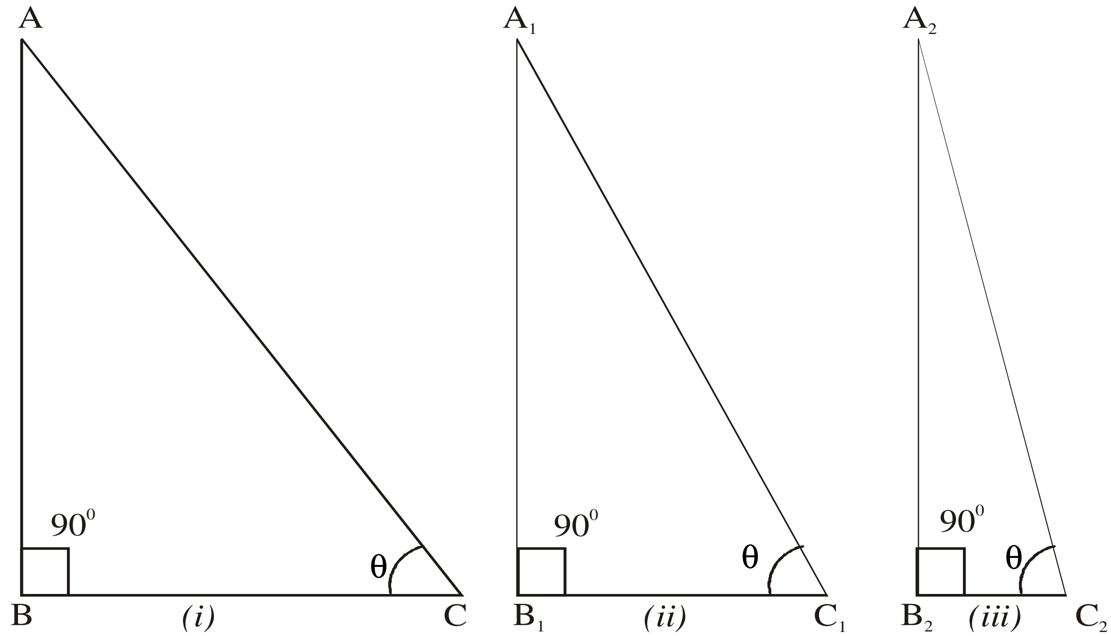
$$\tan 0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 0^0 = \frac{1}{\tan 0^0} = \frac{1}{0}$$ अपरिभाषित या अनिर्धार्य

$$\sec 0^0 = \frac{1}{\cos 0^0} = \frac{1}{1} = 1$$

तथा $$\operatorname{cosec} 0^0 = \frac{1}{\sin 0^0} = \frac{1}{0}$$ अपरिभाषित या अनिर्धार्य

पुनः निम्नांकित चित्रों को ध्यान से देखिए :



समकोण Δ ACB में $\angle$ ABC = 90^0 है तथा $\angle$ ACB = θ है। कल्पना कीजिए कि θ का मान जैसे-जैसे बढ़ते हुए 90^0 की ओर अग्रसर हो रहा है तो θ की संलग्न भुजा BC की लम्बाई घट रही है या बढ़ रही है ?

mhe° le: θ की संलग्न भुजा BC की लम्बाई घट रही है ($BC > B_1C_1 > B_2C_2$) और बिन्दु C, बिन्दु B के सन्निकट होता जा रहा है। अन्ततोगत्वा जब θ लगभग 90^0 के बराबर होगा तो BC की लम्बाई लगभग शून्य के बराबर होगी। और जब θ ठीक 90^0 के बराबर होगा तो BC की लम्बाई शून्य के बराबर होगी। अर्थात् उस दशा में बिन्दु C ठीक बिन्दु B पर पड़ेगा और तब कर्ण AC = लम्ब AB होगा।

अतः $$\sin 90^0 = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AB} = 1$$

$$\cos 90^0 = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{0}{AC} = 0$$

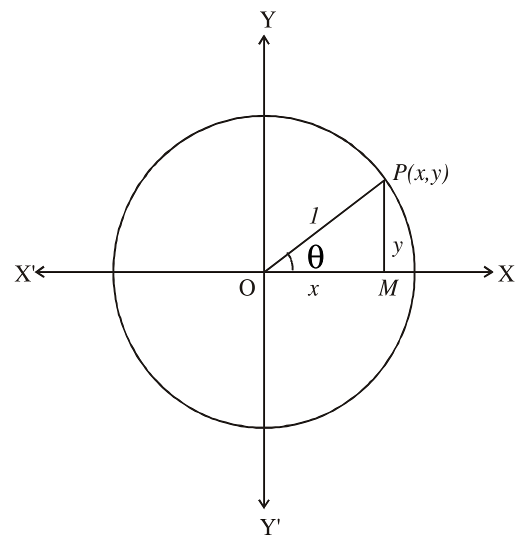
$$\tan 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0}$$ अनिर्धार्य

$$\cot 90^0 = \frac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 90^0 = \frac{1}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} \quad \text{अनिर्धार्य}$$

$$\operatorname{cosec} 90^0 = \frac{1}{\sin 90^0} = \frac{1}{1} = 1$$

त्रिकोणमितीय अनुपात वृत्तीय फलन के रूप में



शिक्षार्थियों को बोध करायें कि किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात उस कोण के वृत्तीय फलन होते हैं। पार्श्व चित्र में इकाई त्रिज्या का एक वृत्त खींचा गया है। उसके केन्द्र O को मूल बिन्दु मानकर O से दो समकोणिक अक्ष X'X एवं Y'Y (संक्षेप में अक्ष X व Y अक्ष) खींचे गये हैं। वृत्त पर कोई एक बिन्दु P लीजिए और इसे वृत्त के केन्द्र O से मिलाइए। रेखा OP को हम परिक्रामी रेखा मानते हैं। जिसके परिक्रमण से उसकी भिन्न-भिन्न स्थितियाँ X-अक्ष के धनात्मक दिशा के साथ भिन्न-भिन्न अंशमाप के धनात्मक कोण बनाती हैं। वृत्त के प्रथम चतुर्थांश में यह कोण न्यून कोण बनता है अर्थात् $0^0 \leq \theta \angle 90^0$ जिसके त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किये जा चुके हैं। द्वितीय चतुर्थांश में परिक्रामी रेखा X-अक्ष के धनात्मक दिशा के साथ-साथ $(180^0 - \theta)$ के बराबर कोण बनाती है तथा तृतीय चतुर्थांश परिक्रामी रेखा अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ $(180^0 + \theta)$ का कोण बनाती है। स्पष्टतः यह कोण 180^0 और 270^0 के बीच का बनता है।

परिक्रामी रेखा OP द्वारा वृत्त के केन्द्र O पर X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाये गये कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात बिन्दु P के निर्देशाकों (x, y) के रूप में भी ज्ञात किये जा सकते हैं। यथा उपर्युक्त चित्र में यदि $\angle POM = \theta$ हो तथा PM, X- अक्ष पर लम्ब हो तो Δ OMP एक समकोण त्रिभुज होगा।

जिसमें $OM = x$ तथा $PM = y$

अतः $\quad \sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{1} = y$ (त्रिभुज का कर्ण वृत्त इकाई त्रिज्या के बराबर है)

इसी प्रकार $\quad \cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{1} = x$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{OP}{PM} = \frac{1}{y}$$

ध्यान दें

$\angle\theta$ के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) के रूप में निकाले जाने तथा विलोमतः $x = \cos\theta, y = \sin\theta$ होने के कारण ही त्रिकोणमितीय अनुपातों को वृत्तीय फलन भी कहते हैं।

प्रथम चतुर्थांश में θ के कोटिपूरक कोण $(90^0 - \theta)$ (जो अवश्य ही न्यूनकोण होंगे) के त्रिकोणमितीय अनुपात भी उपर्युक्त चित्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं।

उपर्युक्त चित्र में $\angle OPM = 90^0 - \theta$

अतः $$\sin(90^0 - \theta) = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{1} = x = \cos\theta$$

$$\cos(90^0 - \theta) = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{1} = y = \sin\theta$$

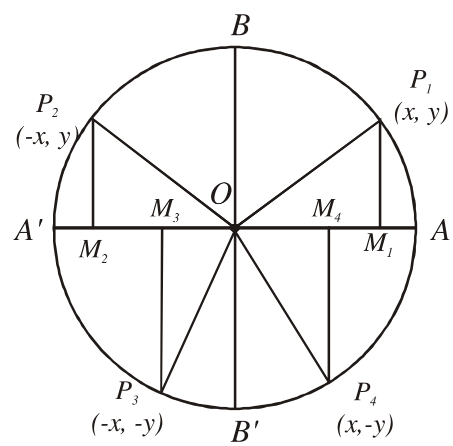
$$\tan(90^0 - \theta) = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y} = \cot\theta$$

$$\cot(90^0 - \theta) = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

$$\sec(90^0 - \theta) = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{OP}{PM} = \frac{1}{y} = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{x} = \sec\theta$$

किसी भी अंशमाप के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात



पार्श्वांकित चित्र को ध्यान से देखिए। चित्र में धनात्मक दिशा में प्रारम्भिक रेखा OA खींची गयी है जहाँ से परिक्रामी रेखा धनात्मक अथवा ऋणात्मक दिशा में परिक्रमण करती हुई किसी भी अंशमाप का कोण बना रही है। मान लीजिए कि प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ चतुर्थांश में परिक्रामी रेखा क्रमशः P_1, P_2, P_3 और P_4 स्थितियों में अवस्थित होती है। स्पष्टतः प्रथम चतुर्थांश में परिक्रामी रेखा OP (OP_1 स्थिति में) प्रारम्भिक

रेखा के साथ न्यूनकोण बना रही है जब कि द्वितीय चतुर्थांश में यह 90^0 से बड़ा और 180^0 से छोटा कोण बनाती है। इसी प्रकार तृतीय चतुर्थांश में यह 180^0 से बड़ा और 270^0 से छोटा कोण बनाती है तथा चतुर्थ चतुर्थांश में यह 270^0 से बड़ा और 360^0 से छोटा कोण बनाती है।

ध्यान दीजिए कि परिक्रामी रेखा उपर्युक्त चारों स्थितियों में आने के पूर्व धनात्मक अथवा ऋणात्मक दिशाओं 1, 2, 3, ... चक्कर भी पूरा कर सकती है और इस प्रकार किसी भी धनात्मक अथवा ऋणात्मक अंशमाप का कोण वह बना सकती है। इन समस्त स्थितियों में परिक्रामी रेखा द्वारा बनाये गये किसी भी अंशमाप के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात ठीक वैसे ही परिभाषित किये जाते हैं जैसे कि किसी समकोण त्रिभुज में किसी न्यूनकोण के eü eS ekeâÙes p eel es n Q G heÙ e$eâ eÛ e$e ceW P की विभिन्न स्थितियों (P_1, P_2, P_3, P_4) के लिए $\angle AOP$ के त्रिकोणमितीय अनुपात निम्नवत् परिभाषित किये जाते हैं :

$$\sin AOP = \frac{MP}{OP}$$

$$\cos AOP = \frac{OM}{OP}$$

$$\tan AOP = \frac{MP}{OM}$$

$$\cot AOP = \frac{OM}{OP}$$

$$\sec AOP = \frac{OP}{OM}$$

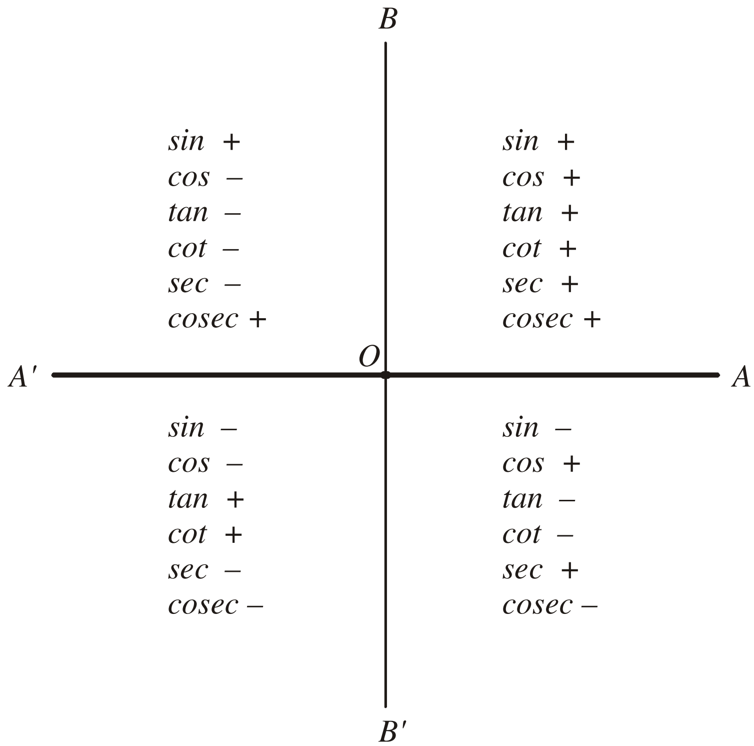
$$\operatorname{cosec} AOP = \frac{OP}{MP}$$

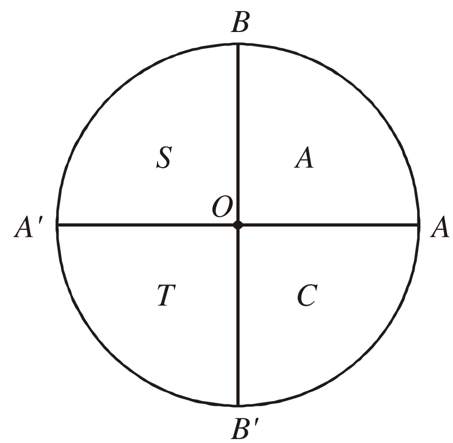
उपर्युक्त चित्र में P_1, P_2, P_3 और P_4 के निर्देशांकों को देखें। प्रथम चतुर्थांश में P_1 के निर्देशांक (x, y) में x और y (भुज और कोटि) दोनों धनात्मक हैं।

अतः $\angle AOP$ के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात धनात्मक होंगे। पुनः द्वितीय चतुर्थांश P_2 के निर्देशांक $(-x, y)$ हैं अर्थात् भुज ऋणात्मक तथा कोटि धनात्मक है। अतः $\angle AOP$ (90^0 से बड़ा तथा 180^0 से छोटा) के त्रिकोणमितीय अनुपातों में *sine* और *cosec* के मान तो धनात्मक होंगे किन्तु शेष अन्य चारों (*cosine, secant, tangent* और *cotangent*) त्रिकोणमितीय अनुपात ऋणात्मक होंगे।

पुनः तृतीय चतुर्थांश में P_3 के निर्देशांक $(-x,-y)$ हैं अर्थात् भुज और कोटि दोनों ऋणात्मक हैं अतः $\angle AOP$ (180^0 से बड़ा तथा 270^0 से छोटा) का केवल *tangent* और *cotangent* धनात्मक होंगे, शेष अन्य चारों त्रिकोणमितीय अनुपात ऋणात्मक होंगे। इसे पुनः चतुर्थ चतुर्थांश में P_4 के निर्देशांक $(x, -y)$ हैं अर्थात भुज धनात्मक तथा कोटि ऋणात्मक है अतः $\angle AOP$ (270^0 से बड़ा तथा 360^0 से छोटा) का केवल *cosine* और

secant ही धनात्मक होंगे, शेष अन्य चारों त्रिकोणमितीय अनुपात ऋणात्मक होंगे। निम्नांकित चित्र में इन्हीं तथ्यों को प्रदर्शित किया गया है :





संक्षेप में

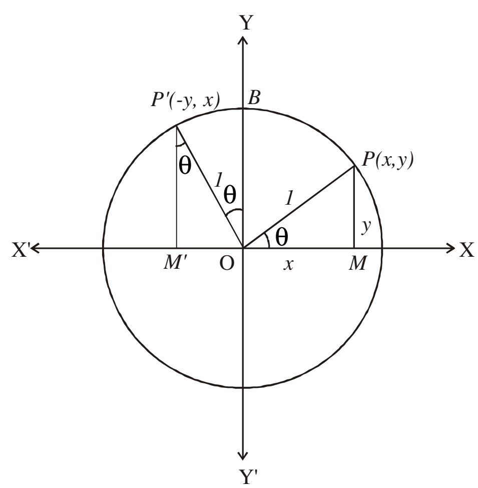
A = *All positive*

S = *Only sine (and cosec) positive*

T = *Only tan (and cot) Positive*

C = *Only cos (and sec) positive*

कोण ($90^0 + \theta$) के त्रिकोणमितीय अनुपात



जब परिक्रामी रेखा द्वितीय चतुर्थांश में स्थित होती है तब वह *X*-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ 90^0 से बड़ा और 180^0 से छोटा कोण बनाती है।

पार्श्वचित्र में $\angle$ POM = θ है।

मान लीजिए कि परिक्रामी रेखा जब OP' की स्थिति में (द्वितीय

चतुर्थांश में) पहुँचती है तो वह X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ का $(90^0+\theta)$का कोण बना रही है जहाँ $\angle P'OB = \theta = \angle POM$

P' से X-अक्ष पर लंब P'M' खींचिए।

बिन्दु P' से X-अक्ष पर खींचा गया लम्ब Y-अक्ष के समान्तर होगा।

अतः $\angle OP'M'$ = एकान्तर $\angle P'OB = \angle POM = \theta$, अब समकोण Δ OM'P' तथा समकोण ΔOMP में,

$$\angle OM'P' = 90^0 = \angle OMP$$

$$\angle OP'M' = \angle POM = \theta$$

तथा संगत भुजा OP' = OP (दोनों वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

अतः $\Delta OM'P' \cong \Delta OMP$

अतः OM' = PM = y (निरपेक्ष मान)

तथा P'M' = OM = x

अतः बिन्दु P' के निर्देशांक $(-y, x)$होंगे।

अतः $$\sin(90^0+\theta) = \sin\angle XOP' = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{1} = \cos\theta$$

(ध्यान दीजिए कि समकोण Δ OMP और समकोण Δ P'M'O सर्वांगसम हैं जिसमें भुजा OM = P'M', PM = OM')

$$\cos(90^0+\theta) = \cos\angle XOP' = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-y}{1} = -\left(\frac{y}{1}\right) = -\sin\theta$$

$$\tan(90^0+\theta) = \tan\angle XOP' = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{x}{-y} = -\left(\frac{x}{y}\right) = -\cot\theta$$

$$\cot(90^0+\theta) = \cot\angle XOP' = \frac{OM'}{P'M'} = \frac{-y}{x} = -\left(\frac{y}{x}\right) = -\tan\theta$$

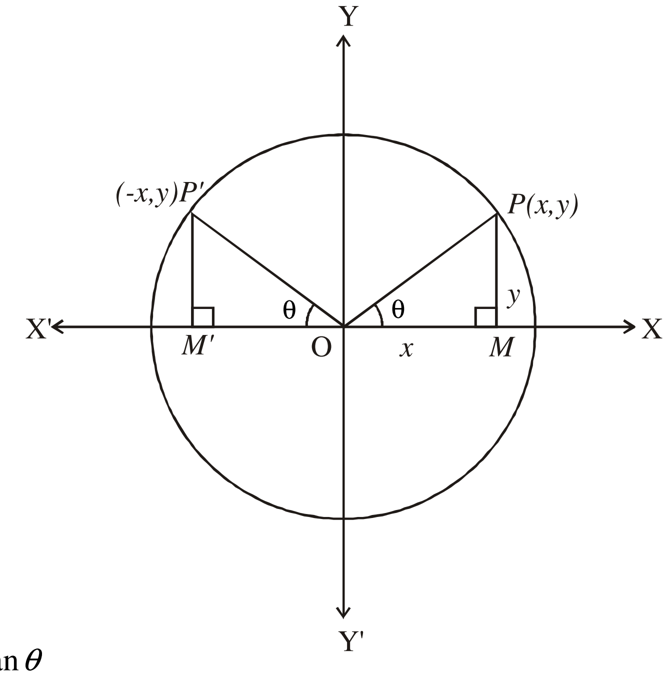
$$\sec(90^0+\theta) = \sec\angle XOP' = \frac{OP'}{OM'} = \frac{1}{-y} = -\left(\frac{1}{y}\right) = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^0+\theta) = \operatorname{cosec}\angle XOP' = \frac{OP'}{P'M'} = \frac{1}{x} = \sec\theta$$

(180° − θ) के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

पार्श्वचित्र में द्वितीय चतुर्थांश में परिक्रामी रेखा की स्थिति OP' है जहाँ $\angle$ P'OM' = $\angle$ POM = θ

अतः $\angle$ XOP' = $(180^0 - \theta)$ स्पष्टतः समकोण Δ OMP और समकोण Δ OM'P' दोनों ही सर्वांगसम हैं। अतः यदि P के निर्देशांक (x, y) हैं तो P' के निर्देशांक $(-x, y)$ होंगे।



अतः

$$\sin(180^0 - \theta) = \frac{P'M'}{OP} = \frac{y}{1} = y = \sin\theta$$

$$\cos(180^0 - \theta) = \frac{OM'}{OP} = \frac{-x}{1} = -x = -\cos\theta$$

$$\tan(180^0 - \theta) = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

$$\cot(180^0 - \theta) = \frac{OM'}{P'M'} = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y} = -\cot\theta$$

$$\sec(180^0 - \theta) = \frac{OP'}{OM'} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -\sec\theta$$

$$\operatorname{cosec}(180^0 - \theta) = \frac{OP'}{P'M'} = \frac{1}{y} = \operatorname{cosec}\theta$$

कोण (180° + θ) के त्रिकोणमितीय अनुपात

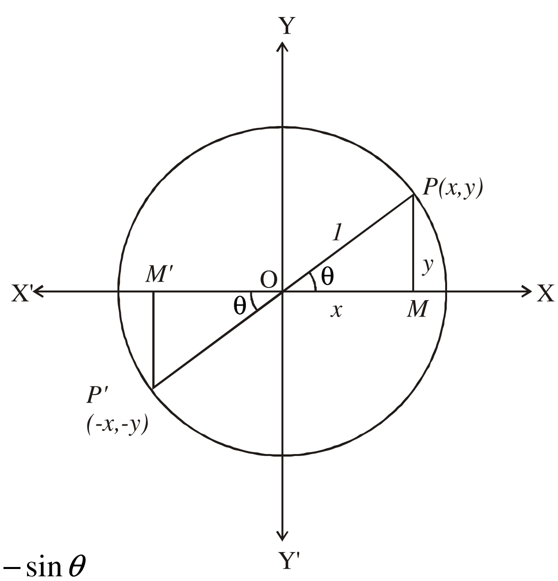
पार्श्वचित्र में परिक्रामी रेखा OP की स्थिति OP' है जहाँ

$\angle P'OM' = \angle POM = \theta$

अतः $\angle XOP' = 180^0 + \theta$

स्पष्टतः समकोण $\Delta OMP \equiv$ समकोण $\angle OM'P'$

अतः यदि P के निर्देशांक (x, y) हैं तो P' के निर्देशांक $(-x, -y)$ होंगे।



अब

$$\sin(180^0 + \theta) = \sin\angle XOP' = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{-y}{1} = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(180^0+\theta)=\cos\angle XOP'=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^0+\theta)=\tan\angle XOP'=\frac{P'M'}{OM'}=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

$$\cot(180^0+\theta)=\cot\angle XOP'=\frac{OM'}{P'M'}=\frac{-x}{-y}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

$$\sec(180^0+\theta)=\sec\angle XOP'=\frac{OP'}{OM'}=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-\sec\theta$$

$$\operatorname{cosec}(180^0+\theta)=\operatorname{cosec}\angle XOP'=\frac{OP'}{P'M'}=\frac{1}{-y}=-\frac{1}{y}=-\operatorname{cosec}\theta$$

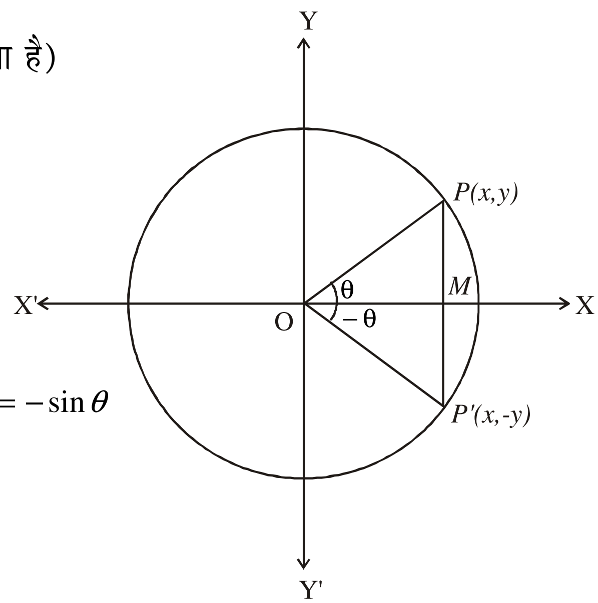
कोण (-θ) अथवा (360° - θ) के त्रिकोणमितीय अनुपात

पार्श्व चित्र में परिक्रामी रेखा की स्थिति OP' है, जो X -अक्ष के साथ बामावर्ती (clockwise) दिशा में ∠ POM के बराबर ∠ P'OM बना रही है।

अतः ∠ P'OX = θ (क्योंकि ∠ POX = θ माना गया है)

स्पष्टतः समकोण Δ OMP ≅ समकोण Δ OMP'

अतः यदि बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं तो P' के निर्देशांक $(x, -y)$ होंगे।



अतः

$$\sin(-\theta)=\sin\angle P'OX=\frac{P'M}{OP'}=\frac{-y}{1}=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\angle P'OX=\frac{OM}{OP'}=\frac{x}{1}=x=\cos\theta$$

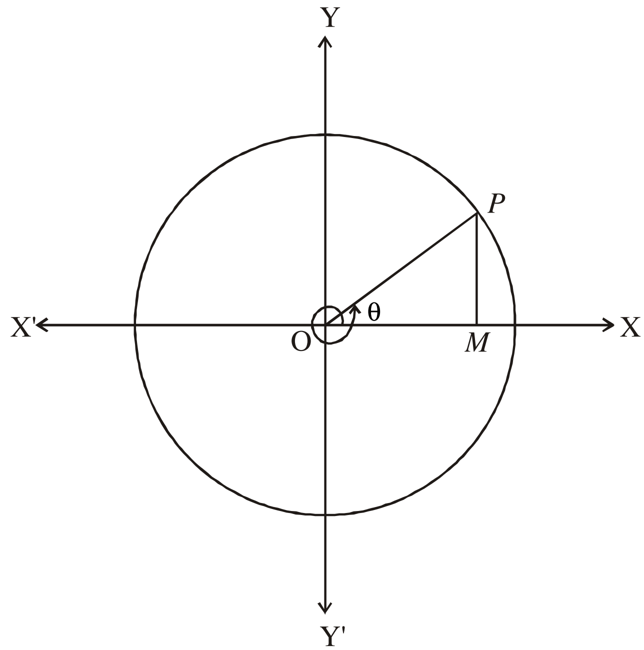
$$\tan(-\theta)=\tan\angle P'OX=\frac{P'M}{OM}=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$$

$$\cot(-\theta)=\cot\angle P'OX=\frac{OM}{P'M}=\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}=-\cot\theta$$

$$\sec(-\theta)=\sec\angle P'OX=\frac{OP'}{OM}=\frac{1}{x}=\sec\theta$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta)=\operatorname{cosec}\angle P'OX=\frac{OP'}{P'M}=\frac{1}{-y}=-\frac{1}{y}=-\operatorname{cosec}\theta$$

उपर्युक्त कोणों $\pm\theta$, $(90^0\pm\theta)$ और $(180^0\pm\theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों का बोध हो जाने के बाद 0^0 से लेकर 360^0 तक के किसी भी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किये जा सकते हैं। किन्तु 360^0 से बड़े कोण का त्रिकोणमितीय अनुपात कैसे ज्ञात करते हैं, चलिए देखें :



पार्श्वचित्र में परिक्रामी रेखा ने एक चक्कर पूरा करने के बाद θ के बराबर और कोण बनाया है, अर्थात् परिक्रामी रेखा OP ने X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ कुल $(360^0 + \theta)$ के बराबर कोण बनाया है। इस प्रकार वास्तव में कोण θ ही बना। इस प्रकार

$$\sin(360^0+\theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\cos(360^0+\theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(360^0+\theta) = \frac{PM}{OM} = \tan\theta$$ इत्यादि होते हैं।

अर्थात् 360^0 से उसके अथवा उसके अपवर्त्य जितना अधिक कोण होता है, त्रिकोणमितीय अनुपात भी उसी कोण का पूर्ववत् ज्ञात करते हैं।

जैसे $\sin 405^0 = \sin(360^0+45^0) = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 405^0 = \cos(360^0+45^0) = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ आदि।

टिप्पणी : यदि कोणों $\pm\theta$, $(90^0\pm\theta)$ और $(180^0\pm\theta)$ के केवल प्रथम दो त्रिकोणमितीय अनुपात की सम्यक प्रकार से जानकारी हो जाय अर्थात् उनके sine और cosine के मान ज्ञात हों तो शेष tangent, cotangent, secant और cosecant की जानकारी निम्नांकित तथ्यों से हो जाती है :

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ **या** $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ **और** $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

संक्षेप में उपर्युक्त सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को निम्नवत् संकलित कर सकते हैं :

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(90^0-\theta) = \cos\theta$

$\cos (90^0 - \theta) = \sin \theta$

$\sin (90^0 + \theta) = \cos \theta$

$\cos (90^0 + \theta) = - \sin \theta$

$\sin (180^0 - \theta) = \sin \theta$

$\cos (180^0 - \theta) = -\cos \theta$

$\sin (180^0 + \theta) = -\sin \theta$

$\cos (180^0 + \theta) = -\cos \theta$

हमको विशेष कोणों 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0 के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हैं, अब हम उपर्युक्त सूत्रों की सहायता से कुछ और विशिष्ट कोणों 120^0, 135^0, 150^0, 180^0 के भी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करेंगे।

यथाः $\sin 120^0 = \sin (90^0 + 30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^0 = \cos (90^0 + 30^0) = - \sin 30^0 = -\frac{1}{2}$

उपर्युक्त दोनों को निम्नवत् भी ज्ञात कर सकते हैं :

$\sin 120^0 = \sin (180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^0 = \cos (180^0 - 60^0) = - \cos 60^0 = -\frac{1}{2}$

पुनः $\sin 135^0 = \sin (90^0 + 45^0) = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 135^0 = \cos (90^0 + 45^0) = - \sin 45^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 150^0 = \sin (180^0 - 30^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$\cos 150^0 = \cos (180^0 - 30^0) = - \cos 30^0 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\sin 180^0 = \sin (180^0 + 0^0) = - \sin 0^0 = 0$

$\cos 180^0 = \cos (180^0 + 0^0) = - \cos 0^0 = -1$

वैकल्पिक विधि

$\sin 180^0 = \sin (180^0 - 0^0) = \sin 0^0 = 0$

$\cos 180^0 = \cos (180^0 - 0^0) = - \cos 0^0 = -1$

शिक्षक ऐसे ही अन्य विशेष कोणों जैसे 210^0, 225^0 आदि के त्रिकोणमितीय अनुपात भी शिक्षार्थियों से ज्ञात करायें।

विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की निम्नांकित सारणी द्रष्टव्य हैं :

त्रिकोणमितीय अनुपात	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अनिर्धार्य	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotangent	अनिर्धार्य	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	अनिर्धार्य
secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अनिर्धार्य	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cosecant	अनिर्धार्य	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अनिर्धार्य

कुछ उदाहरण लेकर उपर्युक्त विशिष्टकोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का अनुप्रयोग करना देखते हैं।

उदाहरण -1 $\sin 390^0$ का मान है

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $-\frac{1}{2}$ (iv) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

हल : $\sin 390^0 = \sin (360^0 + 30^0)$

$= \sin 30^0$

$= \frac{1}{2}$ अतः विकल्प (i) सही है।

उदाहरण -2 $\cos A = \frac{1}{2}$ प्रतिस्थापित कर सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}+\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=2\cos ecA$$

हल : बायाँ पक्ष = $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}+\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} + \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}$$

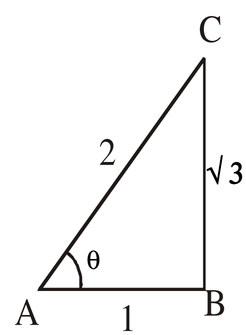
$$= \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}} \qquad = \qquad \sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad = \qquad \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3+1}{\sqrt{3}} \qquad = \qquad \frac{4}{\sqrt{3}} \qquad \text{..... (1)}$$

दिया है कि $\cos A = \frac{1}{2}$



अतः पार्श्वचित्र में यदि $AB = 1$

तो $AC = 2$

अतः तब $CB^2 = AC^2 - AB^2$

$= (2)^2 - (1)^2$

$= 3$

अतः $CB = \sqrt{3}$

अतः $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अतः $\operatorname{cosec} A = \frac{2}{\sqrt{3}}$

या $2 \operatorname{cosec} A = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

θ

या $2\operatorname{cosec} A = \frac{4}{\sqrt{3}}$ 2

(1) तथा (2) से

$$\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}+\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=2\cos ecA$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 3 - $\dfrac{2\sin 30^0 \cos 30^0}{2\sin^2 30^0 - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए

टिप्पणी : {$\sin^2 30^0$ का अर्थ है $(\sin 30^0)^2$}

हल : $$\frac{2\sin 30^0 \cos 30^0}{2\sin^2 30^0 - 1} = \frac{2\times(\sin 30^0)\cos 30^0}{2\times(\sin 30^0)^2 - 1}$$ $\left[\begin{array}{l} \therefore \sin 30^0 = \frac{1}{2} \\ \cos 30^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$

$$= \frac{2\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\frac{1}{4}-1}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1}$$

$= -\sqrt{3}$ उत्तर

उदाहरण 4 - सिद्ध कीजिए कि

$\sin 150^0 \cos 120^0 + \cos 330^0 \sin 660^0 = -1$

हल : $\sin 150^0 \cos 120^0 + \cos 330^0 \sin 660^0$

$= \sin (180^0 - 30^0) \cos (90^0 + 30^0) + \cos (360^0 - 30^0) \sin (360^0 + 300^0)$

$= \sin 30^0 (-\sin 30^0) + \cos 30^0 \sin 300^0$ $\{\cos (360 - \theta) = \cos\theta)$

$= -\sin 30^0 . \sin 30^0 + \cos 30^0 \sin (360^0 - 60^0)$ $\{\sin (360 - \theta) = \sin\theta)$

$= -\sin 30^0 . \sin 30^0 + \cos 30^0 (-\sin 60^0)$

$= -\sin 30^0 . \sin 30^0 - \cos 30^0 \sin 60^0$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$

$= -1$ अतः सिद्ध हुआ।

मूल्यांकन

- ज्यामितीय विधि से $sin\ 30^0$ का मान ज्ञात कीजिए
- $cos330^0$ का मान ज्ञात कीजिए।
- $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए जब कि $\sin\theta = \frac{1}{2}$
- यदि $\sin\theta = \frac{1}{2}$ तो सिद्ध कीजिए कि

  (i) $3\ sin\ \theta - 4\ sin^3\ \theta = 1$ $\{ sin^3\ \theta = (sin\ \theta)^3 \}$

  (ii) $4\ cos^3\ \theta - 3\ cos\theta = 0$
- $sin\ 330^0\ cos\ 300^0 + cos\ 330^0\ sin\ 300^0$ का मान ज्ञात कीजिए
- $2sin^2\ 30^0\ tan\ 60^0 - 3cos^2\ 60^0\ sec^2\ 30^0$ का मान ज्ञात कीजिए
- सिद्ध कीजिए $\frac{1-\sin 60^0}{\cos 60^0} = \frac{1-\tan 30^0}{1+\tan 30^0}$

अध्याय 7 त्रिकोणमितीय अनुपातों की ऊँचाई एवं दूरी के प्रश्नों के हल में सरल अनुप्रयोग

उद्देश्य

- ➲ उन्नयन एवं अवनमन कोण का बोध कराना।
- ➲ ऊँचाई एवं दूरी से सम्बन्धित समस्याओं के हल में त्रिकोणमितीय अनुपातों का उपयोग करना।

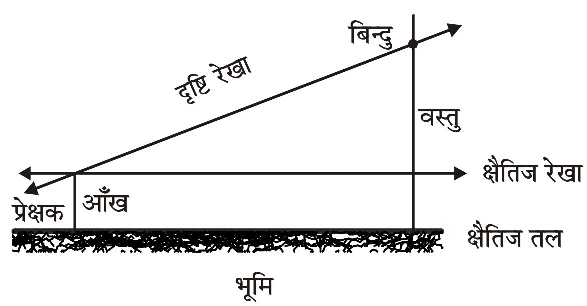
शिक्षण बिन्दु

- ☞ उन्नयन एवं अवनमन कोण
- ☞ त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से ऊँचाई एवं दूरी से सम्बन्धित प्रश्नों का हल

प्रस्तुतीकरण

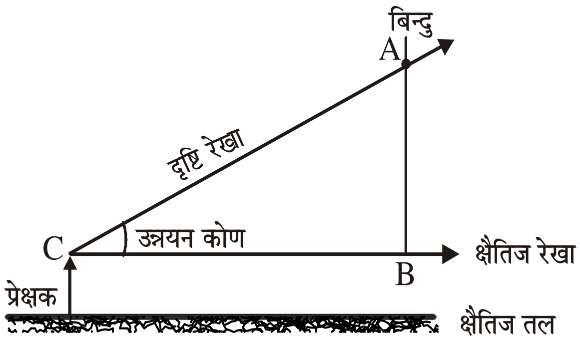
उन्नयन एवं अवनमन कोण

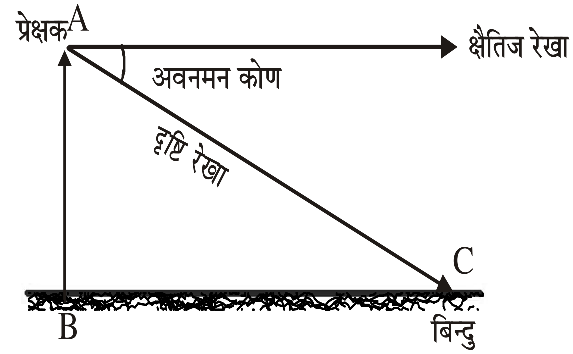
शिक्षक उन्नयन एवं अवनमन कोण की अवधारणा को स्पष्ट करने से पहले शिक्षार्थियों को क्षैतिज एवं दृष्टि रेखाओं को स्पष्ट करें।



पृथ्वी के क्षैतिज तल के समान्तर खींची गयी रेखा को क्षैतिज रेखा कहते हैं, तथा जब हम किसी वस्तु के किसी बिन्दु को देखते हैं तो आँख और वस्तु के देखने वाले बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा को दृष्टि रेखा कहते हैं। इस चित्र को देखिए :

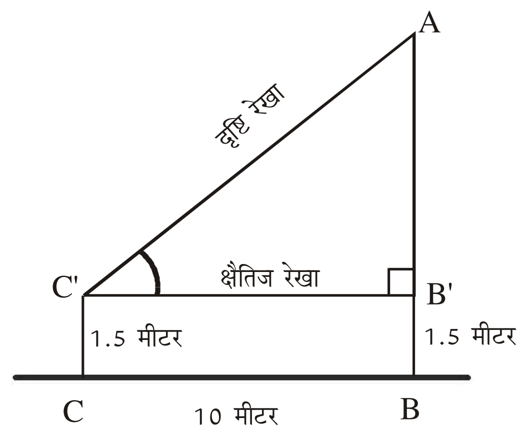
स्पष्ट करें कि वस्तु पर स्थिति किसी बिन्दु को देखने के लिए यदि क्षैतिज रेखा से ऊपर देखना पड़े तो दृष्टि रेखा तथा क्षैतिज रेखा के बीच का कोण उन्नयन या उन्नतांश या उन्नत कोण (Angle of elevation) कहलाता है, और यदि वस्तु पर स्थित किसी बिन्दु को देखने के लिए क्षैतिज रेखा से नीचे देखना पड़े तो दृष्टि रेखा तथा क्षैतिज रेखा के बीच का कोण अवनमन कोण या अवनतांश या अवनत कोण (Angle of depression) कहलाता है। निम्नांकित चित्रों को देखिए :





त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से ऊँचाई एवं दूरी से सम्बन्धित प्रश्नों का हल :

आप त्रिकोणमितीय अनुपात एवं कोणों, 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 एवं 90^0 के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान पढ़ चुके हैं। इनकी सहायता से आप ऊँचाई एवं दूरी से अनेक समस्याओं का हल निकाल सकते हैं।



जैसे : मान लीजिए कि पृथ्वी पर एक सीधे खड़े वृक्ष AB की ऊँचाई ज्ञात करनी है जिसकी चोटी तक पहुँचना कठिन है। इसके लिए पृथ्वी पर उसके आधार B से कुछ दूरी (माना 10 मीटर) पर स्थित बिन्दु C पर प्रेक्षक खड़ा है, जिसकी ऊँचाई 1.5 मीटर है। जिसने बिन्दु C' से पेड़ के शिखर A का उन्नयन कोण ($\angle AC'B'$) किसी कोण मापक यंत्र से माप लिया। उपर्युक्त चित्र से स्पष्ट करें कि CC' प्रेक्षक की ऊँचाई है और C'B' क्षैतिज रेखा है। मान लीजिए $\angle AC'B'$ की माप 60^0 है। त्रिभुज AB'C' एक समकोण त्रिभुज है। $\angle AC'B'$ के लिए रेखाखण्ड B'C' आधार तथा रेखा खण्ड AB' लम्ब है। लम्ब और आधार का अनुपात $\tan\theta$ होता है

समकोण $\angle AB'C'$ में,

$$\tan 60^0 = \frac{AB'}{B'C'}$$

या $\sqrt{3} = \frac{AB'}{10}$ (B'C' = BC = 10 मी0) ($\tan 60^0 = \sqrt{3}$ होता है)

या $AB' = 10\sqrt{3}$ ($\sqrt{3} = 1.732$ के सन्निकट होता है)

$= 10 \times 1.732$

$= 17.32$

अतः वृक्ष AB की ऊँचाई = $AB' + BB'$

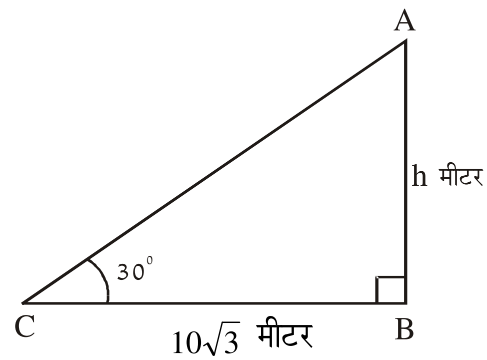
= (17.32 + 1.5) मी = 18.82 मी लगभग

उदाहरण 1 - एक पेड़ पृथ्वी पर सीधा खड़ा है। पेड़ से $10\sqrt{3}$ मीटर की दूरी पर भूमि पर स्थित एक बिन्दु से पेड़ के शिखर का उन्नयन कोण 30^0 है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल - ceevee ekeâ hes keâer T ÂeeF & h मीटर है।

चित्र में AB पेड़ है तथा पेड़ से $10\sqrt{3}$ मीटर दूर भूमि पर स्थित बिन्दु C है।

समकोण Δ ABC में



$$\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{10\sqrt{3}}$

या $h \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

या $h = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= 10$ मीटर

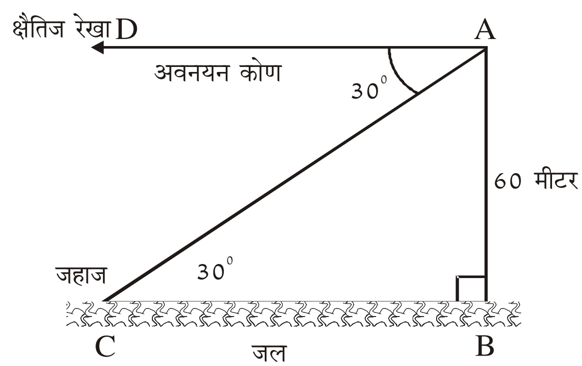
अतः पेड़ की ऊँचाई = 10 मीटर

उदाहरण 2 - एक प्रकाश स्तम्भ की ऊँचाई 60 मीटर है और इससे समुद्र में एक जहाज को देखा जाता है, जिसका अवनमन कोण 30^0 है। प्रकाश स्तम्भ से जहाज की क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

हल - चित्र में AB प्रकाश स्तम्भ है और जहाज C स्थान पर है।

माना कि प्रकाश स्तम्भ से जहाज की दूरी BC $= x$ मी

$\angle ACB = \angle DAC = 30^0$ (एकान्तर कोण है।)



समकोण Δ ABC में

$$\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$$

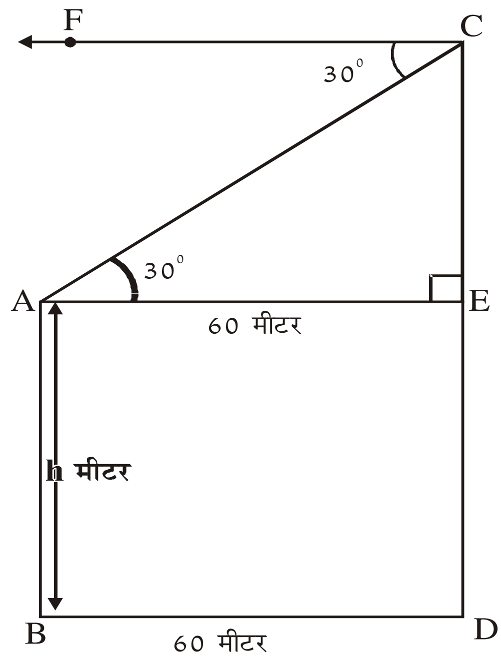
या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60}{x}$

या $x = 60 \times \sqrt{3} = 60\sqrt{3}$

अतः प्रकाश स्तम्भ से जहाज की दूरी = $60\sqrt{3}$ मीटर

उदाहरण 3 - दो मीनारों के बीच की क्षैतिज दूरी 60 मीटर है। एक मीनार से दूसरी मीनार की चोटी की ओर देखने पर अवनमन कोण 30^0 है। यदि पहली मीनार की ऊँचाई 150 मी हो, तो दूसरी मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल - चित्र में CD पहली मीनार है तथा पहली मीनार की ऊँचाई 150 मीटर दी है।



$\therefore$ CD = 150

AB दूसरी मीनार है।

माना कि दूसरी मीनार की ऊँचाई h मीटर है।

AB = h

$AB \perp BD$ है। इसलिए ABDE एक आयत है।

अतः DE = AB = h

और CE = CD - DE = 150 - h मीटर

पुनः BD तथा AE, आयत ABDE की सम्मुख भुजाएँ हैं।

AE = BD = 60 मीटर (मीनारों के बीच की दूरी 60 मीटर दी है)

$\angle$ CAE = अवनमन कोण $\angle$ ACF = 30^0

अतः समकोण Δ AEC में

$$\tan 30^0 = \frac{CE}{AE}$$

या $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150-h}{60}$$

या $$60 = \sqrt{3} \times (150-h)$$

या $$\frac{60}{\sqrt{3}} = 150-h$$

या $$\frac{20\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 150-h$$

या $$20\sqrt{3} = 150-h$$

या $$h = 150-20\sqrt{3}$$

$= 150 - 20 \times 1.732$

$= 150 - 35.640$

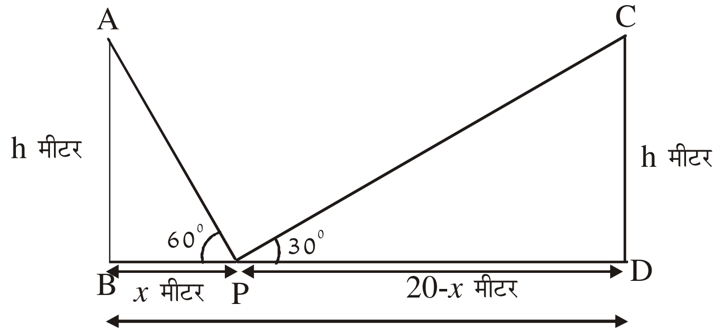
$= 114.36$

अतः दूसरी मीनार की ऊँचाई = 114.36 मीटर लगभग

उदाहरण 4 - एक ही ऊँचाई के दो मकान एक सड़क के जिसकी चौड़ाई 20 मीटर है, दोनों ओर स्थित हैं। सड़क पर स्थित एक बिन्दु से मकानों के शिखरों के उन्नयन कोण क्रमशः 60^0 और 30^0 हैं। मकानों की ऊँचाई और बिन्दु का स्थान ज्ञात कीजिए।

हल - माना कि प्रत्येक मकान की ऊँचाई h मीटर है। चित्र में AB और CD मकान हैं तथा BD सड़क की चौड़ाई है। BD एक बिन्दु P है। P से AB उन्नयन कोण $\angle APB = 60^0$ तथा CD का उन्नयन कोण $\angle CPD = 30^0$

माना कि $BP = x$ मीटर तो $DP = (20-x)$ मी क्योंकि सड़क की चौड़ाई = 20 मी दी है।



अतः समकोण $\Delta\ ABP$ में

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{BP},$$

$$\text{या } \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$h = x\sqrt{3} \qquad ....(1)$$

और समकोण $\Delta\ CDP$ में $\tan 30^0 = \frac{CD}{DP}$ या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{20-x}$

या $h\sqrt{3} = 20-x$

$$h = \frac{20-x}{\sqrt{3}} \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) व (2) से $x\sqrt{3} = \frac{20-x}{\sqrt{3}}$

समीकरण (1) व (2) से

या $3x = 20 - x$

या $4x = 20$

$x = 5$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर $h = 5\sqrt{3}$

अतः प्रत्येक मकान की ऊँचाई = $5\sqrt{3}$ मीटर

तथा बिन्दु, 60^0 उन्नयन कोण वाले मकान से 5 मीटर दूर है।

मूल्यांकन

नोट : गणना के लिए $\sqrt{2} = 1.414$ तथा $\sqrt{3} = 1.732$ ले सकते हैं।

1. समतल भूमि पर स्थित एक बिन्दु से उसी तल पर स्थित मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30^0 है। यदि मीनार से बिन्दु की क्षैतिज दूरी 20 मीटर है, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक बिजली का खम्भा 10 मीटर ऊँचा है। खम्भे को लम्बवत् सीधा रखने के लिए एक तार का एक सिरा खम्भे की चोटी से बँधा है और दूसरा सिरा भूमि पर स्थिर किया गया है। यदि तार, खम्भे के आधार बिन्दु से होकर जाने वाली क्षैतिज रेखा के साथ 45^0 का कोण बनाये, तो तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
3. एक मकान की खिड़की से एक झण्डे के शिखर उन्नयन कोण 60^0 तथा उसके आधार का अवनमन कोण 30^0 है। यदि मकान से झण्डे की क्षैतिज दूरी 6 मीटर हो, तो झण्डे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. एक चिमनी के आधार की ओर क्षैतिज रेखा पर 50 मीटर चलने पर उसके शिखर का अन्नयन कोण 30^0 से 45^0 हो जाता है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. दो नौकाएँ एक प्रकाश स्तम्भ की विपरीत दिशाओं में हैं। स्तम्भ के शीर्ष से, जो 40 मीटर ऊँचा है, नौकाओं के अवनमन कोण 45^0 तथा 60^0 हैं। नौकाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
6. एक खम्भे की परछाईं, उसकी ऊँचाई के बराबर है, तो उस समय सूर्य का उन्नयन कोण होगा :

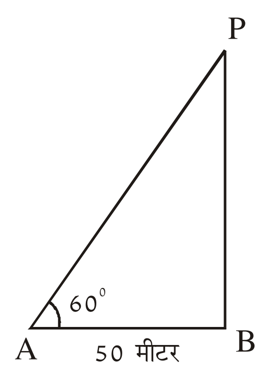
   (i) 0^0 *(ii)* 30^0

   (iii) 45^0 *(iv)* 90^0

7. एक झण्डे के लट्ठे के पाद से 50 मीटर की दूरी पर एक बिन्दु A है। यदि $\angle PAB = 60^0$, तो झण्डे की ऊँचाई है :

   (i) $50\sqrt{3}$ मीटर   *(ii)* 25 मीटर

   (iii) 60 मीटर   *(iv)* $50\sqrt{2}$ मीटर



इकाई - 3 ज्यामिति

अध्याय 8 त्रिभुजों में असमिका सम्बन्ध

उद्देश्य

इस अध्याय को पढ़ने के बाद शिक्षार्थी समझ सकेंगे :

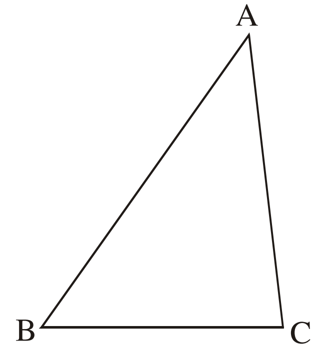
- त्रिभुज में दो असमान भुजाओं के सम्मुख कोणों के सम्बन्ध को।
- त्रिभुज में दो असमान कोणों के सम्मुख भुजाओं के सम्बन्ध को।
- त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का कोण का तीसरी भुजा से सम्बन्ध को।
- किसी रेखा के बाहर स्थित किसी बिन्दु से उस रेखा तक खींचे गये रेखाखंडों का लाम्बिक रेखाखण्ड से सम्बन्ध को।

शिक्षण बिन्दु

- यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर न हों, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है।
- यिदि किसी त्रिभुज के दो कोण असमान हों, तो बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।
- किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल, तीसरी भुजा से बड़ा होता है।
- एक दी हुई रेखा पर एक बिन्दु से जो इस रेखा पर स्थित नहीं है, डाले गये सभी रेखाखण्डों में लाम्बिक रेखाखण्ड सबसे छोटा होता है।

प्रस्तुतीकरण

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर न हों, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है :



क्रियाकलाप 1

- विषम बाहु Δ ABC की रचना करें।
- Δ ABC की भुजाओं AB तथा AC पर ध्यान दें।
- कौन सी भुजा लम्बी तथा कौन सी भुजा छोटी है।

⌘ भुजा AB की लम्बाई भुजा AC की लम्बाई से अधिक है अर्थात् भुजा AB लम्बी तथा भुजा AC इससे छोटी है।

⌘ भुजा AB तथा भुजा AC के सामने स्थित कोण कौन-कौन से हें।

⌘ भुजा AB के सामने $\angle ACB$ तथा भुजा AC के सामने $\angle ABC$ स्थित है।

⌘ $\angle ACB$ तथा $\angle ABC$ को मापिये

⌘ कौन कोण बड़ा तथा कौन सा कोण छोटा है।

⌘ $\angle ACB$ का मान $\angle ABC$ के मान से अधिक है अर्थात् $\angle ACB > \angle ABC$

⌘ कुछ और त्रिभुज बना कर इस क्रिया कलाप को दोहराया जाय

⌘ क्या निष्कर्ष निकलता है।

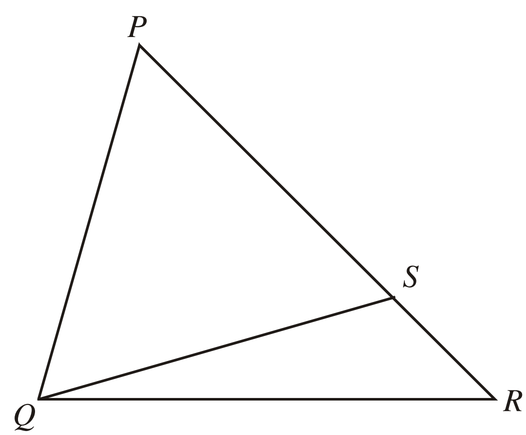
प्रत्येक त्रिभुज में बड़ी भुजा के सामने का कोण छोटी भुजा के सामने के कोण से बड़ा है।

अब इस तथ्य को निम्नवत तर्क द्वारा सिद्ध करना स्पष्ट करें :

दिया है : ΔPQR में, $PR > PQ$

सिद्ध करना है

$\angle PQR > \angle PRQ$



रचना : रेखाखण्ड PR में बिन्दु S इस प्रकार लीजिए कि $PS = PQ$, तथा बिन्दु S को बिन्दु Q से मिला दीजिए।

उपपत्ति : ΔPQS में,

$\therefore PQ = PS$ (रचना से)

$\therefore PQS > \angle PSQ$ .... (1)

(समान भुजाओं के सामने के कोण हैं।)

परन्तु $\angle PSQ$, ΔQRS का बहिष्कोण है।

$\therefore \angle PSQ > \angle SRQ$ .... (2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\angle PQS > \angle SRQ$

परन्तु $\angle PQR > \angle PQS$

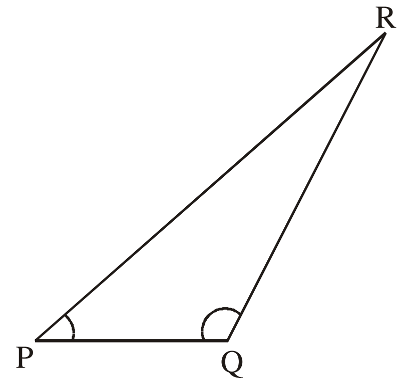
$\therefore \angle PQR > \angle SRQ$

या $\angle PQR > \angle PRQ$ (क्योंकि $\angle PRQ$, $\angle SRQ$ ही है)

यदि किसी त्रिभुज को दो कोण असमान हो, तो बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है :

क्रिया कलाप 2

- ⌘ $\Delta\ PQR$ बनाइये जिसके सभी कोण असमान हों।
- ⌘ $\angle\ PQR$ तथा $\angle\ QPR$ पर ध्यान दें।
- ⌘ कौन सा कोण बड़ा तथा कौन सा कोण छोटा है ?
- ⌘ $\angle\ PQR$ बड़ा तथा $\angle\ QPR$ छोटा है।
- ⌘ $\angle\ PQR$ के सामने की भुजा तथा $\angle\ QPR$ के सामने की भुजा के नाम बताइये।
- ⌘ $\angle\ PQR$ के सामने की भुजा PR तथा $\angle\ QPR$ के सामने की भुजा QR है।
- ⌘ भुजा PR तथा भुजा QR की लम्बाई मापिये।
- ⌘ भुजा PR की लम्बाई अधिक तथा भुजा QR की लम्बाई कम है। अर्थात् भुजा $PR >$ भुजा QR
- ⌘ कुछ और त्रिभुज बनाकर इस क्रिया कलाप की पुनरावृत्ति की जाय।
- ⌘ क्या परिणाम प्राप्त होता है ?



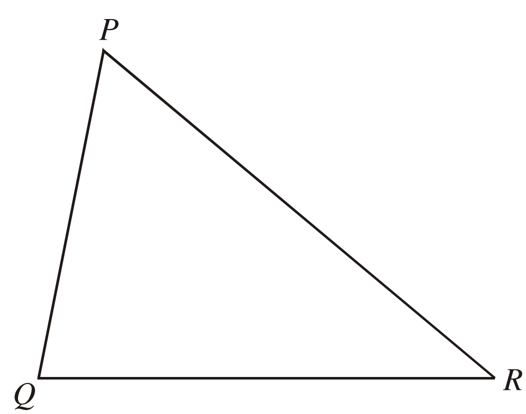
प्रत्येक त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा छोटे कोण के सामने की भुजा से बड़ी है।

शिक्षक इस प्रमेय को निम्नवत् तर्क द्वारा सिद्ध करें :

दिया है : $\Delta\ PQR$ में $\angle\ Q > \angle\ R$

सिद्ध करना है : $PR > PQ$

उपपत्ति : $\Delta\ PQR$ में PR तथा PQ की मापों के सम्बन्ध निम्नलिखित तीन स्थितियाँ सम्भव हैं, जिनमें केवल एक ही सत्य होगी



(i) $PR = PQ$

(ii) $PR < PQ$

और *(iii)* $PR > PQ$

***(i)* प्रथम स्थिति :**

यदि $PR = PQ,$

तो $\angle\ Q = \angle\ R$

परन्तु यह ज्ञात के विरूद्ध है।

$\therefore PR \neq PQ$

(ii) **द्वितीय स्थिति :**

यदि $PR < PQ,$

तो $\angle Q < \angle R$

परन्तु यह भी ज्ञात के विरूद्ध है।

अतः $PR < PQ$ नहीं है।

(iiii) **तृतीय स्थिति :**

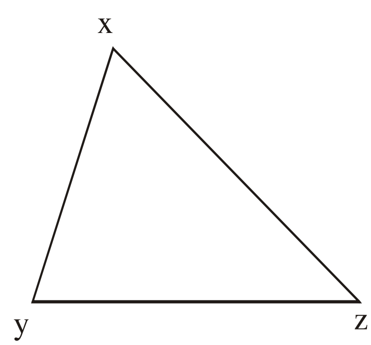
$\therefore$ प्रथम और द्वितीय दो स्थितियाँ असत्य सिद्ध कर चुके हैं।

$\therefore$ तीसरी स्थिति अवश्य सत्य होगी

अतः $PR > PQ$

किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल, तीसरी भुजा से बड़ा होता है :

क्रिया कलाप 3



⌘ एक $\Delta\, x\, y\, z$ चित्रानुसार बनाएँ

⌘ भुजाओं $x\, y$, $y\, z$ तथा $z\, x$ की लम्बाई मापें

⌘ $x\, y + y\, z$ का मान ज्ञात कीजिये

⌘ $(xy + yz\,)$ और xz में कौन बड़ा कौन छोटा है।

⌘ $(xy + yz)$ का माप xz से अधिक है।

अर्थात् $(xy + yz) > xz$

⌘ इसी प्रकार $(yz + zx)$ की तुलना (xy) से तथा $zx + xy$ की तुलना yz से करें

⌘ क्या परिणाम प्राप्त होता है ?

⌘ $(yz + zx) > xy$ तथा $(zx + xy) > yz$

⌘ कुछ और त्रिभुज बनाकर इस क्रिया कलाप को दोहरायें

⌘ क्या निष्कर्ष निकलता है ?

किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

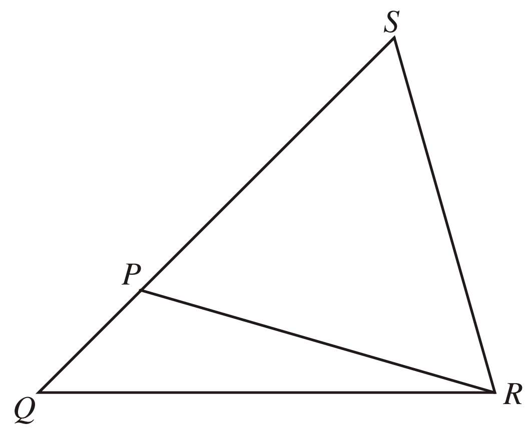
आइये अब इस प्रमेय को तर्क द्वारा सिद्ध करते हैं :

ज्ञात है : $\Delta\, PQR$

सिद्ध करना है : $PQ + PR > QR$

$PQ + QR > PR$

तथा $PR + QR > PQ$



रचना : भुजा QP को बिन्दु S तक इस प्रकार बढ़ायें कि $PS = PR$ तथा बिन्दु S को R से मिला दीजिए

उपपत्ति : ΔPRS में

$\therefore PR = PS$ <(रचना से)

$\therefore \angle PRS = \angle PSR$ (समान भुजाओं के सामने के कोण हैं)

$\therefore \angle PRS + \angle QRP > \angle PSR$

परन्तु $\angle PRS + \angle QRP = \angle QRS$

अतः $\angle QRS > \angle PSR$ या, $\angle QRS > \angle QSR$

अब ΔQSR में

$\therefore \angle QRS > \angle QSR$

$\therefore \angle QS > QR$ ($\therefore$ QS बड़े कोण के सामने की भुजा है।)

परन्तु $QS = QP + PS$ <

या $QS = QP + PR$ (क्योंकि $PS = PR$)

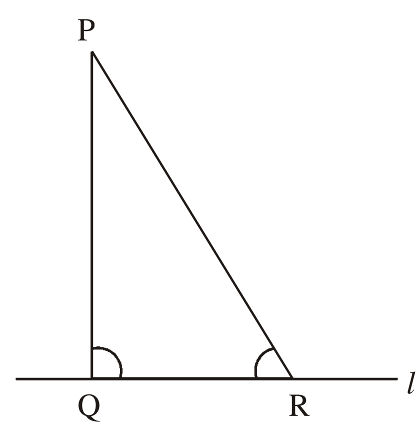
$\therefore QP + PR > QR$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि

$PQ + QR > PR$ और $PR + QR > PQ$

एक दी हुई रेखा पर एक बिन्दु से, जो इस रेखा पर स्थित नहीं है, डाले गये सभी रेखाखण्डों में लाम्बिक रेखाखण्ड सबसे छोटा होता है।

क्रिया कलाप 4



- ⌘ रेखा l खींचिए
- ⌘ रेखा l पर बिन्दु 'P' से लम्ब PQ डालिए
- ⌘ बिन्दु Q के अतिरिक्त रेखा पर कोई अन्य बिन्दु R लीजिए।
- ⌘ PR को मिलाइए
- ⌘ ΔPQR पर ध्यान दें
- ⌘ ΔPQR का मान क्या है ?

⌘ $\angle PQR = 90^0$

ΔPQR में $\angle PQR > \angle PQR$

⌘ भुजा $PR >$ भुज PQ (Δ में बड़े कोण के सामने की भुजा छोटे कोण के सामने की भुजा से बड़ी होती है)

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि रेखा l पर स्थित R के अतिरिक्त अन्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा भी PQ से बड़ी होगी।

प्राप्त निष्कर्ष है

दी हुई रेखा पर एक बिन्दु से जो उस रेखा पर स्थित नहीं है, डाले गये रेखा खंडों में लाम्बिक रेखा खंड सबसे छोटा होता है।

⌘ PQ तथा PR की लम्बाई मापिये।

⌘ कौन सी रेखा की लम्बाई अधिक है।

⌘ रेखा PR की लम्बाई लम्ब PQ से अधिक है अर्थात् $PR > PQ$

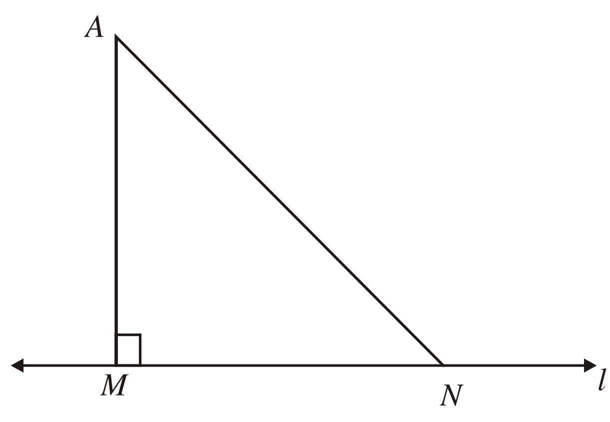
⌘ इसी प्रकार रेखा पर अन्य कई बिन्दु लेकर P से मिलाइये तथा इनकी लम्बाई ज्ञात कीजिये।

⌘ क्या निष्कर्ष निकलता है ?

दी हुई रेखा पर एक बिन्दु से जो उस रेखा पर स्थित नहीं है, डाले गये रेखाखंडों में लाम्बिक रेखा खंड सबसे छोटा होता है।

अब इस प्रमेय को तर्क द्वारा सिद्ध करायें :

ज्ञात है : l एक दी हुई रेखा है। इसके बाहर A कोई बिन्दु है। बिन्दु A से रेखा l पर AM है तथा रेखा l पर M के अतिरिक्त N कोई बिन्दु है। बिन्दु N को बिन्दु A से मिलाया गया है।



सिद्ध करना है : $AM < AN$

उपपत्ति : ΔAMN में

$\therefore \angle AMN <$समकोण है

$\therefore \angle ANM <$न्यूनकोण होगा। (क्योंकि Δ के तीनों अन्तःकोणों का योगफल 2 समकोण होता है।)

अतः $\angle AMN > \angle ANM$

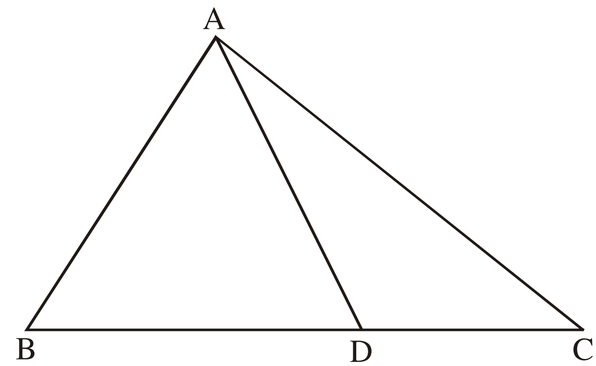
$\therefore AN < AM$ (क्योंकि बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।

$\therefore AM < AN$

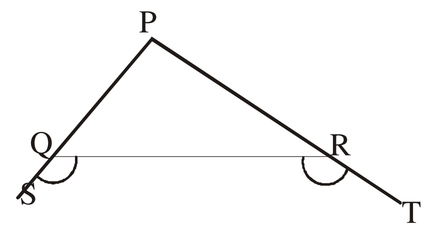
मूल्यांकन

- दर्शाइये कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लम्बी भुजा होती है।

- $\Delta\ ABC$ में AC तथा AB रेखा AD कोण BAC का समद्विभाजन करती है। सिद्ध कीजिये। $\angle\ ADC > ADB$



- $\Delta\ PQR$ की भुजाओं PQ तथा PR को क्रमशः S तथा T तक बढ़ाया गया है यदि $\angle\ SQR < QRT$ तो सिद्ध कीजिये $PR > PQ$



अध्याय 9 बिन्दु पथ और संगमन प्रमेय

उद्देश्य

- इस इकाई के अध्ययन के पश्चात बिन्दुपथ तथा उससे सम्बन्धित प्रमेय को सिद्ध करने की समझ विकसित हो जाय।
- संगमन बिन्दु तथा इससे सम्बन्धित प्रमेय को सिद्ध कर सके।

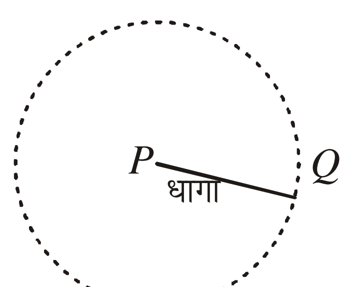
शिक्षण बिन्दु

- बिन्दुपथ तथा बिन्दुपथ ज्ञात करने की विधि।
- दिये हुये दो बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ।
- दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ।
- त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं।
- त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं।
- त्रिभुज के शीर्षों से सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्ब संगामी होते हैं।
- त्रिभुज की मध्यिकायें संगामी होते हैं।

सरल निरूपण

क्रिया कलाप 1

- ड्राइंग बोर्ड पर सफेद कागज पिन से जड़ें।
- कागज के किसी बिन्दु P पर एक आलपिन गाड़ें
- आलपिन से एक पतला धागा बाँधें।
- धागे के दूसरे सिरे Q से एक पेंसिल बाँध कर पिन चारों और घुमाकर कागज पर पेन्सिल से बिन्दु अंकित करें।



- पिन से सभी बिन्दुओं की दूरी कितनी होगी ?
- पिन से सभी बिन्दुओं की दूरी धागे के लम्बाई के बराबर होगी।
- इन बिन्दुओं को मिलावें

⌘ क्या देखते हैं ?

⌘ सभी बिन्दु एक वृत्ताकार पथ पर स्थित हैं।

⌘ इस क्रिया कलाप से क्या निष्कर्ष निकलता है।

किसी तल में एक नियत बिन्दु P से सदैव समान दूरी परस्थित बिन्दु का पथ वृत्ताकार होता है। अर्थात् किसी नियत बिन्दु से समान दूरी पर स्थित बिन्दु का बिन्दुपथ वृत्त होगा।

क्रिया कलाप 2

⌘ एक रेखा l खींचे

⌘ रेखा के दोनों ओर समान दूरी (2 सेमी) पर पेन्सिल से सेट स्क्वायर की सहायता से कुछ बिन्दु अंकित करें।

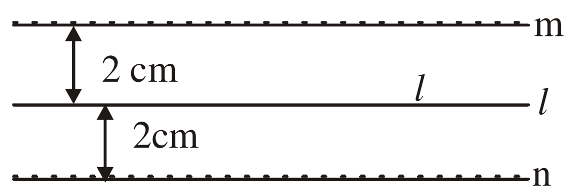
⌘ इन बिन्दुओं को मिलावें

⌘ इन बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखायें m तथा n हैं।

⌘ रेखायें m तथा n रेखा l के समान्तर हैं।

⌘ इस क्रिया कलाप से क्या निष्कर्ष निकलता है ?

⌘ किसी रेखा से एक ओर समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दु पथ दी गयी रेखा के समान्तर एक रेखा होगी।



बिन्दुपथ ऐसे सभी बिन्दुओं का पथ है जो किसी दी हुई शर्त के आधीन गति करें और दिये हुये शर्त का पालन करने वाले समस्त बिन्दु उस समुच्चय के अवयव होंगे।

अथवा

किसी दिये गये प्रतिबन्ध या प्रतिबन्धों के अनुसार गति करते हुए किसी बिन्दु द्वारा निर्मित वक्रपथ बिन्दु का बिन्दु पथ कहलाता है।

दैनिक जीवन से कुछ उदाहरण लेकर बिन्दुपथ से सम्बन्धित कुछ प्रश्न पूछे जायँ तथा छात्रों से उनका उत्तर प्राप्त करने का प्रयास किया जाय।

प्रश्न 1 - चर्खी वाले झूले में झूलते हुये बालक का बिन्दुपथ क्या होगा ? तर्क सहित उत्तर दें।

2. - चलती हुई बैलगाड़ी के दोनों पहियों केन्द्रों का बिन्दु पथ क्या होगा और क्यों ?

⌘ दिये हुये दो बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ।

⌘ P और Q दो बिन्दु दिये गये हैं।

⌘ बिन्दु S का बिन्दु पथ ज्ञात करना यदि बिन्दु S, P तथा Q से समान दूरी पर है।

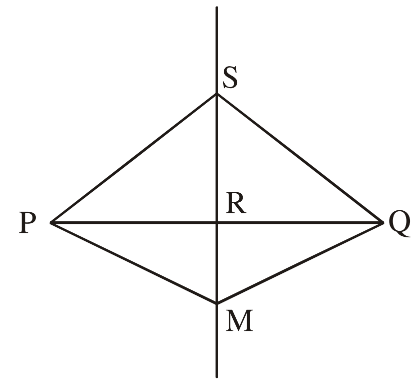
⌘ PQ को मिलाए

⌘ PQ का मध्य बिन्दु R इस प्रकार का बिन्दु है कि

$PR = QR$

⌘ अतः बिन्दु R बिन्दुपथ पर स्थित है।

⌘ माना R के अतिरिक्त अन्य बिन्दु S ऐसा है कि $PS = QS$



⌘ SR को मिलाया

⌘ $\Delta\ PSR$ तथा $\Delta\ QSR$ में

$PS = QS$ (दिया है)

$PR = QR$

SR उभयनिष्ठ है।

$\Delta\ PSR \cong \Delta\ QSR$

$\angle\ SRP = \angle\ SRQ$

$\angle\ SRP + \angle\ SRQ = 180^0$

$\angle\ SRP + \angle\ SRP = 180^0$ $(\angle\ SRP = \angle\ SRQ)$

$\angle\ 2SRP = 180^0$

$$\angle\ SRP = \frac{180^0}{2} = 90^0$$

अतः SR रेखा खंड PQ का लम्ब समद्विभाजक है।

⌘ रेखा SR पर एक बिन्दु M लिया।

⌘ PM तथा QM को मिलाया

⌘ $\Delta\ MPR$ तथा MQR में

$PR = QR$ (दिया है)

$\angle\ MRP = \angle\ MRQ = 90^0$ (सिद्ध कर चुके हैं)

MR उभय निष्ठ है।

$\Delta\ MPR \cong \Delta\ MQR$

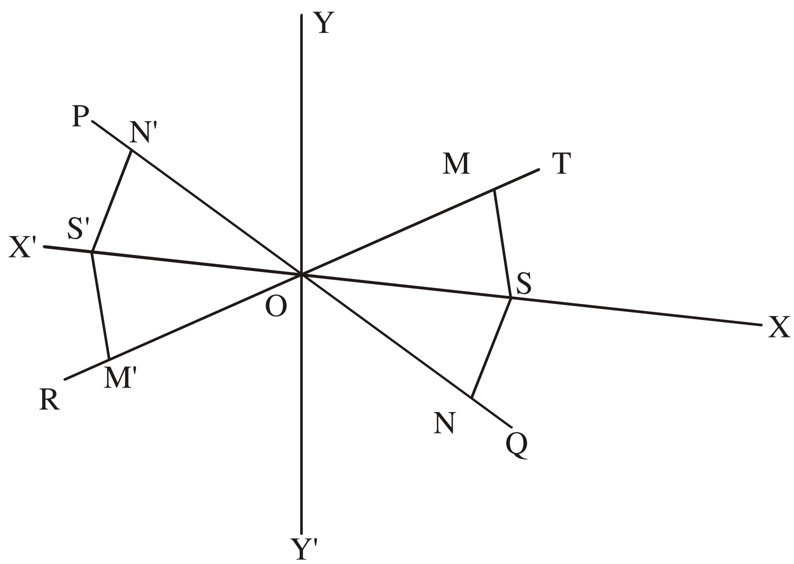
$MP = MQ$

रेखाखण्ड PQ के लम्बार्धक SR पर सिति बिन्दु P तथा Q से समान दूरी पर हैं।

अतः उस बिन्दु का बिन्दु पथ जो दिये हुये बिन्दुओं से समदूरस्थ हों, इन दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा खंड का लम्ब समद्विभाजक होता है।

दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ

⌘ PQ तथा RT दो प्रतिच्छेदी रेखायें हैं।



⌘ इनका प्रतिच्छेद बिन्दु O है।

⌘ प्रतिच्छेदी रेखायें $\angle QOT, \angle ROP, \angle POT$ तथा $\angle ROQ$ बनाती हैं।

⌘ S एक ऐसा बिन्दु है जहाँ से रेखाओं PQ और RT पर डाले गये लम्ब SN तथा SM समान लम्बाई के हैं।

अर्थात् $SN = SM$

⌘ OS को मिलाया

⌘ $\Delta\ OMS$ तथा $\Delta\ ONS$ से

$SM = SN$ (दिया गया है)

$\angle SMO = \angle SNO = 90^0$

OS उभयनिष्ठ हैं।

$\Delta\ OMS \cong \Delta\ ONS$

अतः $\angle MOS = \angle NOS$

अर्थात् बिन्दु S, $\angle MON$ के अर्द्धक पर स्थित है।

⌘ OS रेखा को O के दोनों ओर बढ़ाया तो रेखा XOX' प्राप्त होती है।

⌘ रेखा XOX' पर एक अन्य बिन्दु S' लिया

⌘ S' से रेखा TR पर लम्ब $S'M'$ तथा रेखा PQ पर लम्ब $S'N'$ डाला

$\Delta\, OS'M'$ तथा $\Delta\, OS'N'$ से

$\angle N'OS' = M'OS'$ $\qquad\qquad$ $(\angle MOS = \angle M'OS'$

$\angle S'N'O = \angle S'M'O = 90$ $\qquad\qquad$ $\angle NOS = \angle N'OS')$

⌘ भुजा OS' उभयनिष्ठ है।

$\Delta\, OS'M' \cong OS'N'$

⌘ अतः भुजा $S'M' = S'N'$

⌘ अतः $\angle QOT$ तथा $\angle ROP$ का समद्विभाजक XOX' प्रतिच्छेदी रेखाओं से समान दूरी पर हैं।

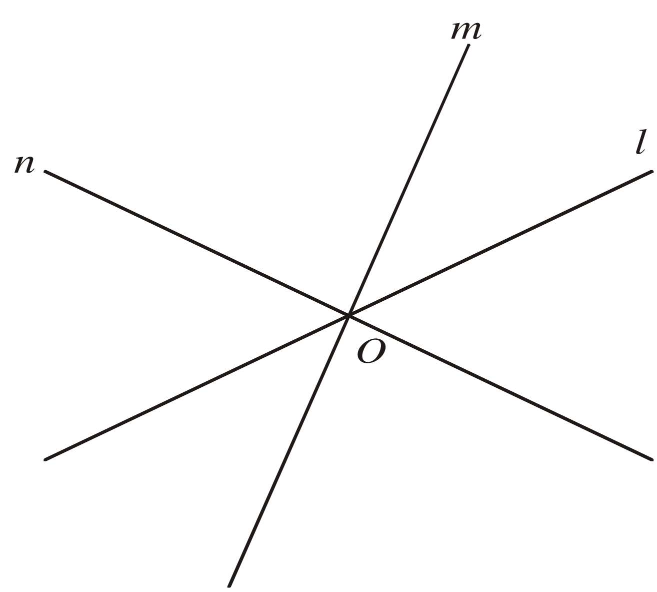
⌘ इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि $\angle POT$ तथा $\angle ROP$ की समद्विभाजक रेखा YOY' प्रतिच्छेदी रेखाओं PQ तथा RT से समदूरस्थ है।

दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ इन रेखाओं से बने कोणों को समद्विभाजित करने वाला रेखा युग्म होता है।

संगामी बिन्दुपथ

⌘ दो से अधिक बिन्दु पथ संगामी कहलाते हैं यदि उन सभी से सम्बन्धित एक सर्वनिष्ठ बिन्दु विद्यमान हो।

⌘ उपर्युक्त चित्र में बिन्दु O रेखाओं l, m तथा n तीनों पर स्थित है। अतः रेखायें l, m तथा n संगामी हैं।



त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों की समद्विभाजक रेखायें

⌘ दिया है $\Delta\, ABC$

⌘ $\angle B$ तथा $\angle C$ की समद्विभाजक रेखायें BO तथा CO बिन्दु O पर मिलती हैं।

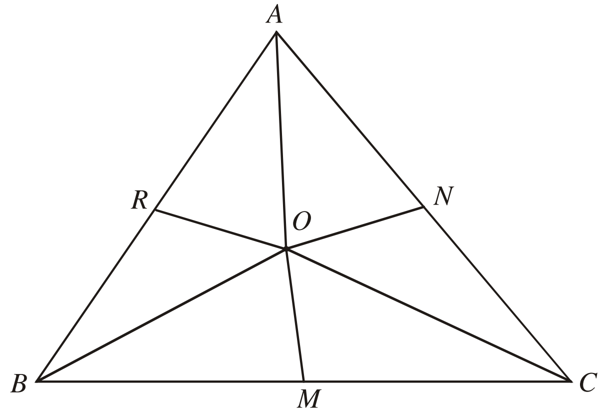
⌘ बिन्दु O से BC पर OM, CA पर लम्ब ON तथा AB पर लम्ब OR डाला

⌘ $\Delta\ OMB$ तथा $\Delta\ ORB$

में $\angle\ OBR = \angle\ OBM$ (दिया गया है)

$\angle\ OMB = \angle\ ORB$ (रचना से)

OB उभयनिष्ठ है।



⌘ $\Delta\ OBM \cong \Delta\ OBR$

⌘ अत: $OM = OR$

⌘ इसी प्रकार $\Delta\ OMC$ और $\Delta\ ONC$ को लेकर सिद्ध कर सकते हैं कि $OM = ON$

$OM = OR$

$OR = ON$

⌘ OA को मिलाया

⌘ $\Delta\ ONA$ तथा $\Delta\ ORA$ से

$\angle\ ONA = \angle\ ORA$ (90^0)

$ON = OR$ (सिद्ध कर चुके हैं)

OA उभयनिष्ठ है

$\angle\ OAN = \angle\ OAR$

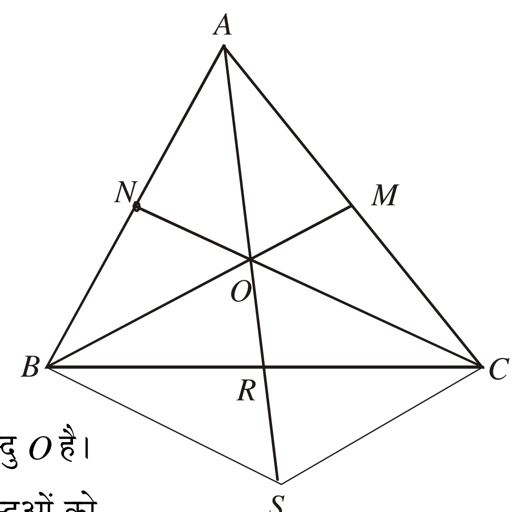
⌘ क्या निष्कर्ष निकलता है ?

किसी त्रिभुज के तीनों अंत:कोणों की समद्विभाजक रेखायें संगामी होती हैं।

विशेष :

⌘ त्रिभुज के अंत: कोणों की समद्विभाजक रेखाओं का संगमन बिन्दु "अन्त: केन्द्र" *(Incentre)* कहलाता है।

त्रिभुज की मध्यिकायें



⌘ दिया है $\cdot\Delta\ ABC$

⌘ मध्यिकायें BM तथा CN बिन्दु O पर मिलती हैं।

⌘ AOR को S तक इस प्रकार बढ़ाया कि $AO = OS$

⌘ BS तथा CS को मिलाया

⌘ $\Delta\ ABS$ में AB का मध्य बिन्दु N तथा AS का मध्य बिन्दु O है।

⌘ $ON \parallel BS$ (त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर और आधी होती हैं।

⌘ या $OC \parallel BS$

⌘ इस प्रकार $\Delta\ ASC$ में

$OM \parallel SC$

⌘ या $OB \parallel SC$

⌘ $\square$ $OBSC$ में $OB \parallel SC$ तथा $OC \parallel BS$ (सिद्ध कर चुके हैं)

⌘ अतः $OBSC$ एक समान्तर चतुर्भुज है

⌘ सामान्तर चतुर्भुज $OBSC$ के विकर्ण एक दूसरे से बिन्दु R पर काट रहे हैं।

⌘ बिन्दु R, BC का मध्य बिन्दु हुआ।

⌘ AR, BC की मध्यिका है जो बिन्दु O से गुजर रही है।

⌘ इस प्रकार ΔABC की तीनों मध्यिकायें AR, BM तथा CN बिन्दु O पर मिल रही हैं, अर्थात् संगामी हैं।

⌘ बिन्दु O मध्यिका AR पर स्थित है

⌘ $OA = OS$ (रचना से)

$OA = OR + SR$

⌘ किन्तु $SR = OR$ (समान्तर चतुर्भुज के विकार्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

$OA = OR + OR = 2OR$

⌘ अतः $OA : OR = 2 : 1$

⌘ इसी प्रकार $BO : OM = 2 : 1$ तथा $CO ; ON = 2 : 1$

इससे सिद्ध हुआ कि त्रिभुज की मध्यिकायें संगामी होती हैं तथा एक दूसरे को 2:1 के अनुपात में काटती हैं।

मूल्यांकन

⌘ यदि किसी त्रिभुज की दो मध्यिकायें बराबर हों, तो सिद्ध कीजिये कि वह समद्विभाजक त्रिभुज है।

⌘ सिद्ध कीजिये कि त्रिभुज के तीन शीर्ष लम्बों का क्षेत्रफल, उसकी तीनों भुजाओं के योगफल से कम होता है।

⌘ ΔABC में O इसके अभ्यंतर में कोई बिन्दु है, सिद्ध कीजिये कि $OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$

⌘ सिद्ध कीजिये कि Δ की दो मध्यिकाओं का योगफल तीसरी मध्यिका से अधिक होता है।

⌘ एक Δ की मध्यिकायें बराबर हैं। सिद्ध कीजिये कि Δ समबाहु त्रिभुज है।

अध्याय 10 समान्तर चतुर्भुज

उद्देश्य

समान्तर चतुर्भुज के निम्नांकित प्रगुणों का बोध कराना

- समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं, का ज्ञान कराना।
- समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं, से परिचित कराना।
- समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं का ज्ञान कराना।
- एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है, यदि इसकी सम्मुख भुजाएँ परस्पर बराबर हों, का ज्ञान कराना।
- एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है, यदि इसके सम्मुख कोण परस्पर बराबर हो, का ज्ञान कराना।
- यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों, तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है, का ज्ञान कराना।
- चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है यदि इसकी सम्मुख भुजाओं का युग्म परस्पर बराबर एवं समान्तर हों, का ज्ञान कराना।
- किसी विशेष समान्तर चतुर्भुज (आयत, वर्ग, समचतुर्भुज) के गुणों का बोध कराना।

शिक्षण बिन्दु

☞ समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख, भुजाएँ बराबर होती हैं।

विलोमतः

एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है यदि इसकी सम्मुख भुजाएँ परस्पर बराबर हों।

☞ समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

विलोमतः

एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है यदि उसके सम्मुख कोण परस्पर बराबर हों।

☞ समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

विलोमतः

यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

- ☞ चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है, यदि इसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर एवं समान्तर हों।
- ☞ आयत के विकर्ण समान लम्बाई के होते हैं।

  विलोमत:

  यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो वह एक आयत होता है।
- ☞ समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।

  विलोमत:

  यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब हों तो वह एक समचतुर्भुज होता है।
- ☞ वर्ग के विकर्ण समान लम्बाई के और परस्पर लम्ब होते हैं।

  विलोमत:

  यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समान लम्बाई के और परस्पर लम्ब हों तो वह वर्ग होता है।
- ☞ त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर और लम्बाई में उसका आधा होती हैं।
- ☞ त्रिभुज की एक भुजा की मध्य बिन्दु से एक अन्य भुजा के समान्तर खींची गयी रेखा तीसरी भुजा को उसके मध्य बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती हैं।
- ☞ यदि तीन या तीन से अधिक समान्तर रेखायें हों और उनके द्वारा एक तीर्यक रेखा पर बनाये गये अन्त: खण्ड बराबर हों, तो किसी अन्य तीर्यक रेखा पर उसके द्वारा बनाये गये अन्त: खण्ड भी बराबर होंगे।

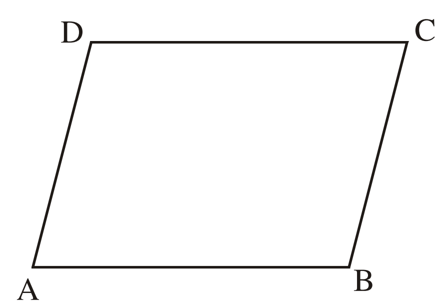
प्रस्तुतीकरण

शिक्षक शिक्षार्थियों का ध्यान इस ओर आकृष्ट करायें कि वे चतुर्भुज, चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ, चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ, चतुर्भुज के सम्मुख कोण, चतुर्भुज के संलग्न कोण, चतुर्भुज के प्रकार (आयत, वर्ग,समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज, पतंग) के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। शिक्षक शिक्षार्थियों को बतायें कि वह चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ समान्तर होती हैं, समान्तर चतुर्भुज कहलाता है।

समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं

शिक्षक शिक्षार्थियों से एक समान्तर चतुर्भुज बनावायें, देखें कि क्या समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं ?

इसे निम्न प्रमेय से स्पष्ट करें -



प्रमेय 1

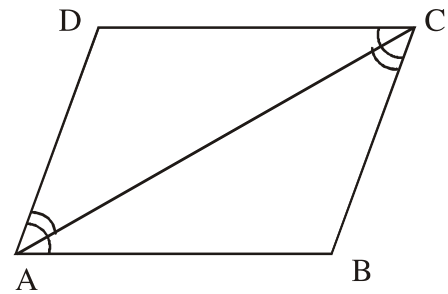
किसी समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

ज्ञात है - समान्तर चतुर्भुज $ABCD$

सिद्ध करना है - $AB = CD$ और $AD = BC$

रचना - AC को मिलायें

उपपत्ति - $\Delta\ ABC$ तथा $\Delta\ ADC$ में



$\therefore \angle CAB = \angle ACD$ (क्यों ?)

$\therefore \angle ACB = \angle DAC$ (क्यों ?)

$\therefore CA = CA$

$\therefore \Delta\ ABC \cong \Delta\ ADC$ (क्यों ?)

$AB = CD$ और $AD = BC$

अत: किसी समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। शिक्षक उपर्युक्त प्रमेय की सहायता से निम्न प्रमेय भी सिद्ध करें -

एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है यदि इसकी सम्मुख भुजाएँ परस्पर बराबर हों।

समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

समान सम्मुख कोण वाला चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है

शिक्षक-शिक्षार्थियों से एक समान्तर चतुर्भुज बनाने को कहें -

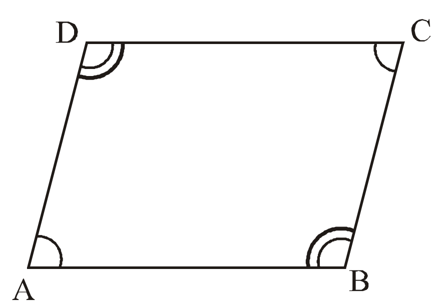
देखें कि क्या समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर हैं ? इसे निम्न प्रमेय से स्पष्ट करें -

प्रमेय 2

''एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है, यदि उसके सम्मुख कोण परस्पर बराबर हों''

दिया है - समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में $\angle A = \angle C$ तथा $\angle B = \angle D$

सिद्ध करना है - चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।



उपत्ति - चतुर्भुज $ABCD$ में

$\angle A = \angle C$ (क्यों ?) 1

$\angle B = \angle D$ (क्यो ?) 2

समीकरण (1) तथा समीकरण (2) को जोड़ने पर,

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$$

परन्तु $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^0$$

रेखाओं AD तथा BC को AB काटती है तथा इसके एक हीं ओर के अन्तःकोणों का योग

$\angle A + \angle B = 180^0$

$AD \| BC$

इसी प्रकार $\angle C + \angle D = 180^0$

$AB \| DC$

अतः चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

शिक्षक निम्न प्रमेय भी सिद्ध करें -

''समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं''

''एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर और समान्तर हो।''

टिप्पणी : शिक्षक शिक्षार्थियों को ध्यान दिलायें कि किसी समान्तर चतुर्भुज में एक कोण समकोण हों तो शेष कोण भी समकोण होते हैं (क्यों ?) किसी समान्तर चतुर्भुज में एक कोण समकोण हो तो वह आयत होता है।

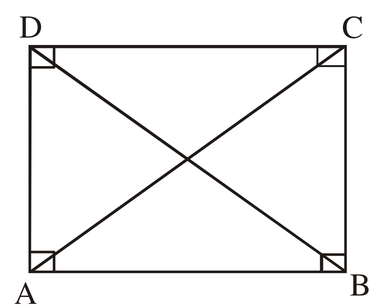
किसी आयत के विकर्ण समान लम्बाई के होते हैं

शिक्षक शिक्षार्थियों से एक आयत बनवायें। देखे कि क्या आयत के विकर्ण समान लम्बाई के हैं ?

इसे निम्न प्रमेय से स्पष्ट करें -

प्रमेय - 3

किसी आयत के विकर्ण समान लम्बाई के होते हैं



ज्ञात है - आयत $ABCD$ जिसके विकर्ण AC तथा BD हैं

सिद्ध करना है - विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD

उपपत्ति - $ABCD$ एक आयत है

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$ (क्यों ?)

ΔBAD तथा ΔABC में

$\therefore AD = BC$ (क्यों ?)

$\therefore AB = AB$ (क्यों ?)

$\therefore \angle DAB = \angle ABC$ (क्यों ?)

$\therefore \Delta BAD \cong ABC$

$AC = BD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

अतः किसी आयत के विकर्ण समान लम्बाई के होते हैं।

शिक्षक निम्न प्रमेय भी सिद्ध करें।

यदि किसी समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो यह आयत है।

समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।

यदि किसी समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत् हों, तो वह समचतुर्भुज होता है।

वर्ग के विकर्ण समान लम्बाई के और परस्पर लम्ब होते हैं।

ध्यान दीजिए कि वर्ग एक आयत साथ ही साथ एक समचतुर्भु होता है तथा वर्ग केवल एक ऐसा चतुर्भुज है जो समचतुर्भुज है।

यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समान लम्बाई के और परस्पर लम्ब हों तो वह वर्ग होता है।

शिक्षक शिक्षार्थियों से एक त्रिभुज बनवायें तथा त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने को कहें। देखें कि मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्त है या नहीं। इन भुजाओं में क्या अनुपात है ?

इसे निम्न प्रमेय से स्पष्ट करें -

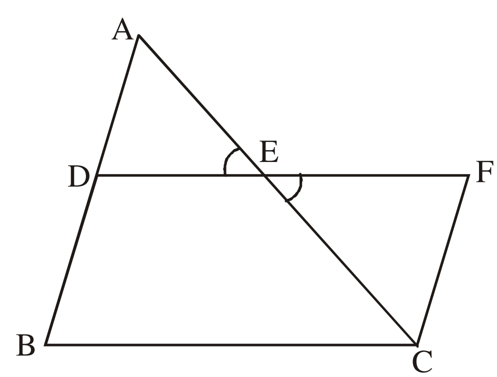
प्रमेय -4

''किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखा खण्ड, तीसरी भुजा के समान्तर और लम्बाई में उसका आधा होता है।

ज्ञात है - $\Delta\, ABC$ में AB तथा AC के मध्य बिन्दु D और E है। इन्हें मिलाने वाला रेखाखण्ड DE है।

सिद्ध करना है - $DE \parallel BC$ तथा $DE = \frac{1}{2} BC$

रचना - रेखाखण्ड DE को बिन्दु F तक इस प्रकार बढ़ायें कि $DE = EF$ | FC मिलायें।



उपपत्ति - $\Delta\, AED$ तथा $\Delta\, CEF$ में

$AE = EC$ (क्यों ?)

$ED = EF$ (क्यों ?)

$\angle\, AED = \angle\, CEF$ (क्यों ?)

$\therefore \Delta\, AED \cong \Delta\, CEF$

$AD = FC = BD$

तथा $\angle\, DAE = \angle\, ECF$

$\therefore$ $AD \parallel FC$

$\therefore$ बिन्दु A, D, B एक ही रेखा पर स्थित है

$\therefore DB \parallel FC$ तथा $DB = FC$

$\therefore$ चतुर्भुज $DBCF$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore DF = BC$ (क्यों)

$\therefore DE = EF$

$\therefore DE = \frac{1}{2} BC$

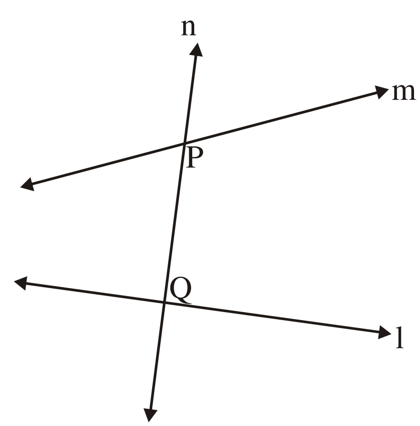
अतः किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड, तीसरी भुजा के समान्तर और लम्बाई में उसका आधा होता है।

उपरोक्त प्रमेय का विलोम अर्थात् निम्न प्रमेय भी सिद्ध करें।

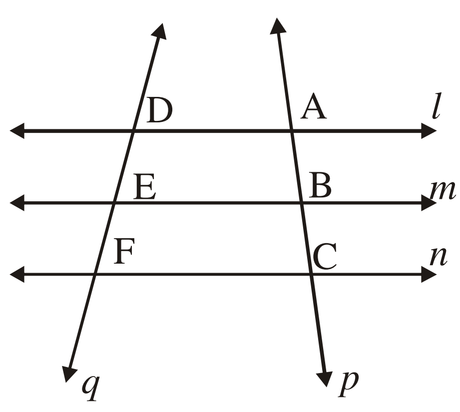
''किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से एक अन्य भुजा के समान्तर खींची गयी रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती हैं।

अन्तःखण्ड (*Intercepts*)

किसी तल में दो रेखाएँ l तथा m हैं। यदि रेखा n इन्हें दो अलग-अलग बिन्दुओं P तथा Q पर प्रतिच्छेद करे तो PQ को दी हुई दो रेखाओं द्वारा तीसरी रेखा n पर कटा अन्तःखण्ड कहते हैं।



शिक्षक शिक्षार्थियों से तीन समान्तर रेखाएँ l, m तथा n खींचने के लिए कहें।



इन समान्तर रेखाओ को प्रतिच्छेद करने वाली रेखाएँ p तथा q खींचने को कहें। देखें कि यदि अन्तःखण्ड AB तथा BC बराबर हैं तो क्या अन्तःखण्ड DE तथा EF बराबर हैं या नहीं ?

इसे निम्न प्रमेय से स्पष्ट करें-

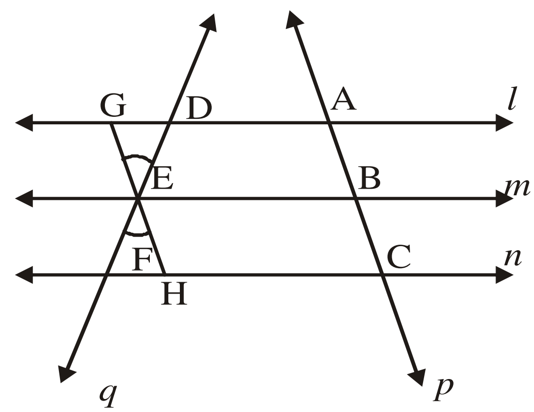
प्रमेय 5

यदि तीन या तीन से अधिक समान्तर रेखाएँ हों और उनके द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाये गये अन्त:खण्ड बराबर हों, तो अन्य तिर्यक रेखा पर उनके द्वारा बनाये गये अन्तः खण्ड भी बराबर होंगे।

ज्ञात है - l, m तथा n तीन समान्तर रेखाएँ हैं जिन्हें तिर्यक रेखा p तथा q समान्तर रेखाओं l, m तथा n को बिन्दुओं A, B और C तथा D, E और F पर काटती हैं। $AB = BC$

सिद्ध करना है - $DE = EF$

रचना - बिन्दु E से होती हुई रेखा p के समान्तर एक रेखा खींचे जो रेखा n तथा l को मान लीजिए G तथा H पर काटती है।



उपपत्ति - $\therefore AG \parallel BE$ (क्यों ?)

तथा $AB \parallel GE$ (क्यों ?)

$\therefore AGEB$ समान्तर चतुर्भुज है।

इसी प्रकार $BEHC$ समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore GE = AB$

$EH = BC$

$\therefore AB = BC$

$\therefore GE = EH$

$\Delta\, GED$ तथा $\Delta\, HEF$ में,

$GE = HE$ (क्यों ?)

$\angle\, GED = \angle\, HEF$ (क्यों ?)

$\angle\, DGE = \angle\, FHE$ (क्यों ?)

$\therefore \Delta\, GED \cong \Delta\, HEF$

$DE = FE$

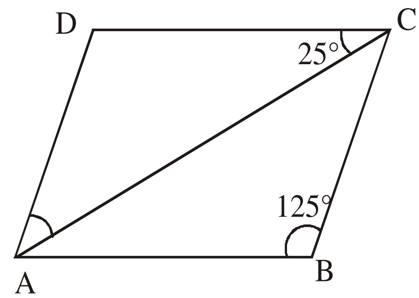
अत: तीन या तीन से अधिक समान्तर रेखाएँ हों और उनके द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाये गये, अन्त:खण्ड बराबर हों तो अन्य तिर्यक रेखा पर उनके द्वारा बनाये गये अन्त:खण्ड भी बराबर होंगे।

मूल्यांकन

उदाहरण 1 - चित्र में, $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। यदि $\angle\, ABC = 125^0$ और $\angle\, DCA = 25^0$ तो $\angle\, DAC$ ज्ञात कीजिए।

हल - $\angle\, ABC = \angle\, ADC = 125^0$, $\angle\, DCA = 25^0$

$\Delta\, ADC$ में $\because \angle\, CAD + \angle\, ADC + \angle\, DCA = 180^0$



$\angle CAD + 125^0 + 25^0 = 180^0$

या $\angle CAD + 150^0 = 180^0$

$\angle CAD = 180^0 - 150^0$

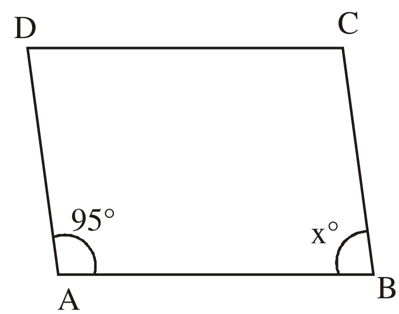
$= 30^0$ उत्तर

उदाहरण 2 - समान्तर चतुर्भुज में शेष तीन कोण की माप ज्ञात करें जबकि एक कोण 95^0 है

हल - माना $\angle A = 95^0, \angle B = x^0$

$\therefore \angle C = \angle A$

$\therefore \angle C = 95^0$ उत्तर



तथा $\angle A + \angle B = 180^0$ (क्यों ?)

या $95^0 + x^0 = 180^0$

या, $x^0 = 180^0 - 95^0 = 85^0$

$\angle B = \angle D = 85^0$ उत्तर

उदाहरण 3 - एक समचतुर्भुज के विकर्णों की लम्बाइयाँ 10 सेमी व 24 सेमी हैं। समचतुर्भुज की भुजा ज्ञात कीजिए।

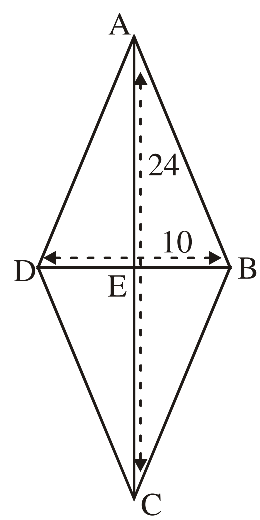
हल - $\because$ समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित होते हैं

$\therefore BE = ED = 5$

तथा $AE = EC = 12$

समकोण ΔAEB में

पाइथागोरस प्रमेय से



$AB^2 = AE^2 + BE^2$

$= 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25$

$= 169$

$AB = \sqrt{169} = 13$ सेमी उत्तर

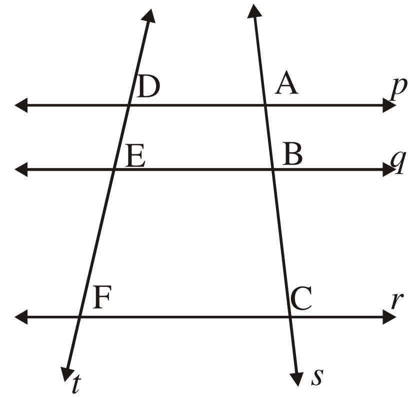
उदाहरण 4 - p, q तथा r तीन समानतर रखाएँ हैं। इन्हें दो तिर्यक रेखाएँ s तथा t प्रतिच्छेद करती हैं। चित्र में यदि AB = 2 सेमी, BC = 4 सेमी तो DE तथा EF में अनुपात ज्ञात कीजिए

हल - $AB : BC = DE : EF$

या $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

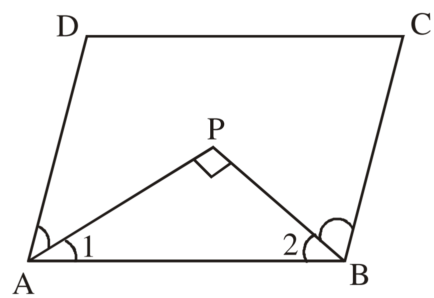
या $\frac{2}{4} = \frac{DE}{EF}$

$DE : EF = 1 : 2$ उत्तर



उदाहरण 5 - समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में क्रामिक कोणों A तथा B के समद्विभाजक P पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle APB = 90^0$

ज्ञात है - समानतर चतुर्भुज $ABCD$ में $\angle A$ तथा $\angle B$ के समद्विभाजक AP तथा BP बिन्दु P पर काटते हैं।



सिद्ध करना है - $\angle APB = 90^0$

उपपत्ति - $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$........... (1) (क्यों ?)

$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle B$......... (2) (क्यो ?)

समीकरण (1) तथा समीकरण (2) को जोड़ने पर

$\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ .... (3)

परन्तु $\angle A + \angle B = 180$ (क्यों ?)

$\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\times 180 = 90^0$

अब ΔAPB में

$\angle 1 + \angle 2 + \angle APB = 180^0$

या $90 + \angle APB = 180^0$

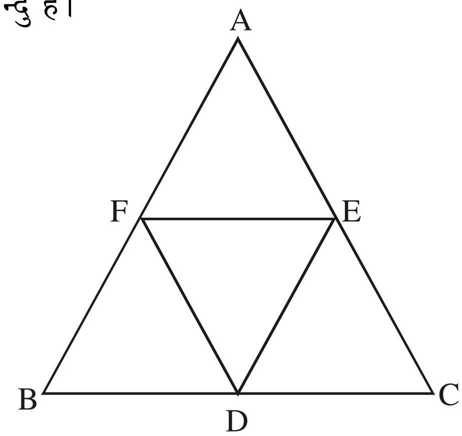
$\angle APB = 180^0 - 90^0 = 90^0$ (यही सिद्ध करना था।)

उदाहरण 6 - चित्र में समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E तथा F हैं, सिद्ध कीजिए कि ΔDEF भी एक समबाहु त्रिभुज है।

ज्ञात है - ΔABC में $AB = BC = CA; D, E, F$ भुजाओं BC, CA तथा CA के मध्य बिन्दु हैं।

सिद्ध करना है - ΔDEF एक समबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति - ΔABC में F तथा E क्रमशः AB तथा CA के मध्य बिन्दु हैं।



$\therefore FE = \frac{1}{2} BC$ .... (1)

इसी प्रकार

$DF = \frac{1}{2} CA$ .... (2)

तथा $DE = \frac{1}{2} AB$ .... (3)

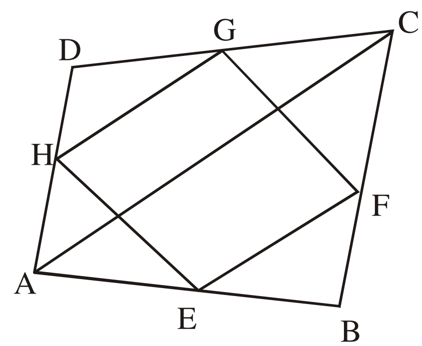
$AB = BC = CA$

$\therefore \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} CA$

$\therefore DE = FE = FD$

$\therefore \Delta DEF$ एक समबाहु त्रिभुज है।

उदाहरण 7 - सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की क्रमिक भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर एक समान्तर चतुर्भुज बनता है।



ज्ञात है - चतुर्भुज $ABCD$ में E, F, G तथा H भुजाओं AB, BC, CD, DA के मध्य बिन्दु हैं। रेखाखण्ड EF, FG, GH तथा HE खीचें गये हैं।

सिद्ध करना है : चतुर्भुज $EFGH$ एक समान्तर चतुर्भुज है

रचना - AC को मिलायें।

उपपत्ति - $\therefore \Delta ABC$ में, भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु E तथा F हैं।

$\therefore EF \parallel AC$

तथा $EF = \frac{1}{2} AC$ .... (1)

(क्योंकि त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर तथा उसका आधा होता है)

इसी प्रकार ΔACD में

$HG \parallel AC$ तथा $HG = \frac{1}{2} AC$ .... (2)

समीकरण (1) तथा (2) समीकरण से

$EF = HG$

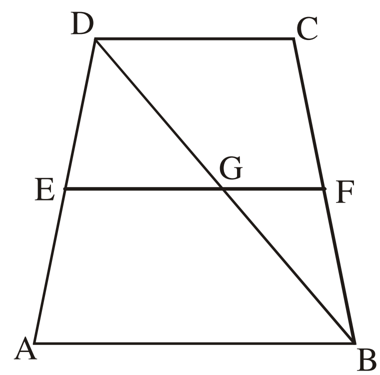
$\therefore EF = HG$ तथा $GH \parallel FE$

$\therefore$ चतुर्भुज $EFGH$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

उदाहरण 8 - $ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel CD$ तथा E भुजा AD का मध्य बिन्दु हैं। यदि BC पर F कोई बिन्दु इस प्रकार है कि $EF \parallel DC$ तो सिद्ध कीजिए कि $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

ज्ञात है - समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \parallel CD$; E भुजा AD का मध्य बिन्दु है तथा $EF \parallel DC$

सिद्ध करना है : $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$



रचना - DB को मिलायें जो EF को बिन्दु G पर काटता है।

उपपत्ति - $\therefore EF \parallel DC$ .... (1)

परन्तु $AB \parallel DC$

$\therefore AB \parallel EF$

या $AB \parallel EG$ .... (2)

ΔABD में, $\therefore E, DA$ का मध्य बिन्दु है तथा $EG \parallel AB$

$\therefore G, DB$ का मध्य बिन्दु है।

$\therefore EF = \frac{1}{2} AB$ .... (3)

अब ΔBCD में, G, DB का मध्य बिन्दु है तथा $GF \parallel DC$

$\therefore F, BC$ का मध्य बिन्दु है।

$\therefore GF = \frac{1}{2} DC$ .... (4)

$\therefore EG + GF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} DC$ (समी0 (3) तथा समी (4) से)

$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$ यही सिद्ध करना था।

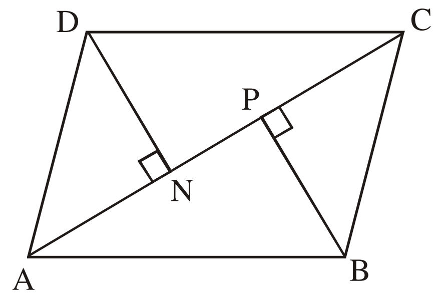
अभ्यास

1. $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। यदि $\angle BAC = 70^0$ तथा $\angle B = 60^0$ तो $\angle D$ तथा $\angle CAD$ ज्ञात कीजिए।

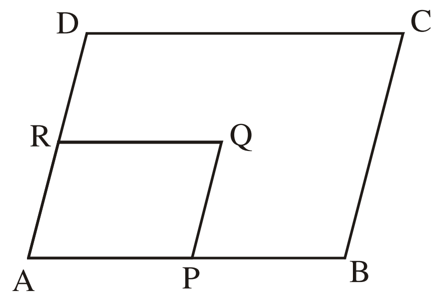
2. सिद्ध कीजिए कि समान्तर चतुर्भुज के क्रमागत कोण सम्पूरक होते हैं।

3. चित्र में, समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC पर DN और BP लम्ब डाले गये हैं। सिद्ध कीजिए कि -

   1. $\Delta DCN \cong \Delta BAP$
   2. $AN = CP$



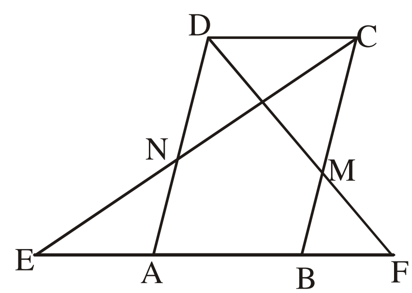
4. संलग्न चित्र में $ABCD$ तथा $APQR$ दो समान्तर चतुर्भुज हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle C = \angle Q$ तथा $\angle B = \angle ARQ$



5. चित्र में चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है और M, N क्रमशः भुजाओं BC, AD के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि

   (i) $EA = AB = BF$

   (ii) $\Delta CEB \cong \Delta DFA$



6. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के मिलाने पर बना चतुर्भुज एक वर्ग है।

7. एक चतुर्भुज $ABCD$ के किर्ण परस्पर लम्ब है सिद्ध कीजिए कि इसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्डों से एक आयत बनता है।

अध्याय 11 क्षेत्रफल

उद्देश्य

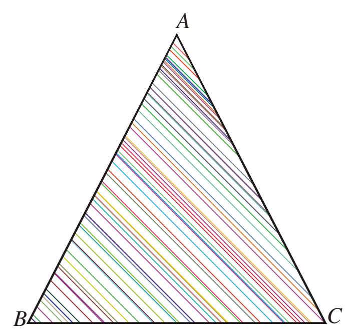
- ➲ किसी क्षेत्र के क्षेत्रफल का बोध कराना
- ➲ समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का ज्ञान कराना

शिक्षण बिन्दु

- ☞ किसी समान्तर चतुर्भुज के एक विकर्ण द्वारा विभाजित किये त्रिभुजों के क्षेत्रफल
- ☞ एक ही आधार तथा समान समान्तर रेखाओं के बीच के समान्तर चतुर्भुज तथा त्रिभुजों के क्षेत्रफल
- ☞ दो समान क्षेत्रफल के त्रिभुजों में एक त्रिभुज की एक भुजा, दूसरे त्रिभुज की एक भुजा के बराबर हो तो उनके संगत शीर्ष लम्ब बराबर होते हैं।

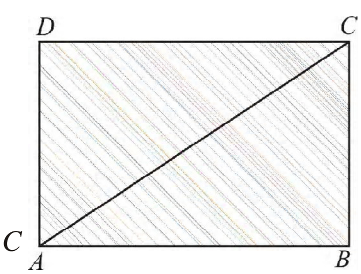
प्रस्तुतीकरण

शिक्षार्थियों को निम्न क्षेत्रों से परिचित करायें।

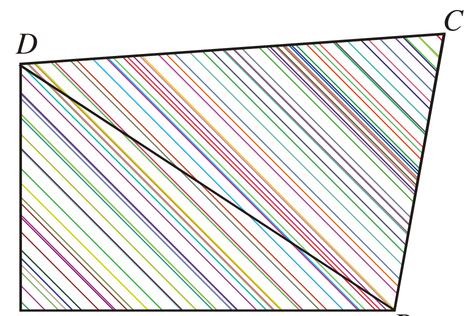


त्रिभुजीय क्षेत्र - तल का वह भाग जो त्रिभुज की भुजाओं से घिरा हुआ है, त्रिभुजीय क्षेत्र कहलाता है।

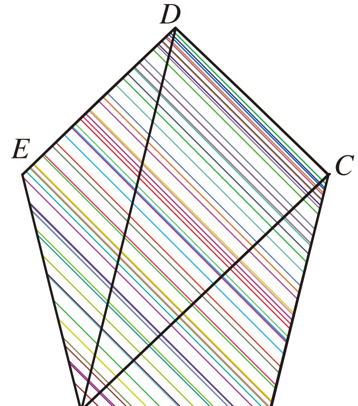
आयतीय क्षेत्र - तल का वह भाग जो आयत की भुजाओं से घिरा हुआ है, आयतीय क्षेत्र कहलाता है। आयत के किसी विकर्ण को मिलाने पर आयत दो समकोण त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है जिनके क्षेत्रफलों का योग आयत के क्षेत्रफल के बराबर होता है।



इसी प्रकार चतुर्भुजीय क्षेत्र तथा बहुभुजीय क्षेत्र के बारे में समझायें।



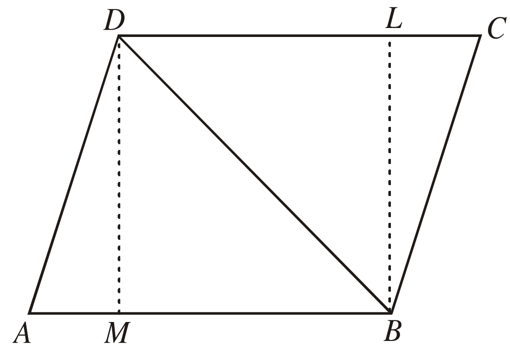
चतुर्भुजीय क्षेत्र



बहुभुजीय क्षेत्र

समान्तर चतुर्भुज के एक विकर्ण द्वारा विभाजित किये गये त्रिभुजों का क्षेत्रफल

शिक्षार्थियों से अभ्यास पुस्तिका पर एक समान्तर चतुर्भुज की रचना करायें तथा एक विकर्ण मिलाने को कहीं। देखें कि यह चतुर्भुज दो त्रिभुजों में विभाजित हो गया है। क्या इन दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हैं ? इसे निम्नांकित प्रमेय द्वारा स्पष्ट करें।



प्रमेय

किसी समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करता है

ज्ञात है - समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ इसका एक विकर्ण BD है।

सिद्ध करना है - $\Delta\ ABD$ का क्षेत्रफल $= \Delta\ BCD$ का क्षेत्रफल

रचना - $BL \perp CD$ तथा $DM \perp AB$ खींचे

उपपत्ति - $\Delta\ ABD$ तथा $\Delta\ BCD$ में

$AB = CD$ (क्यों ?)

$\therefore\ BL = DM$ (क्यों ?)

$$\therefore\ \frac{1}{2} AB \times DM = \frac{1}{2} CD \times BL$$

$\therefore$ क्षेत्रफल $\Delta\ ABD =$ क्षेत्रफल $\Delta\ BCD$

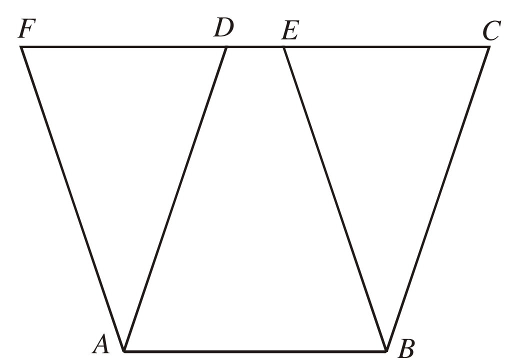
अत: किसी समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।

नोट : त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

एक ही आधार व समान समान्तर रेखाओं के बीच के दो समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल

शिक्षार्थियों से अभ्यास पुस्तिका पर एक ही आधार AB पर (चित्रानुसार) समानतर चतुर्भुज $ABCD$ तथा $ABEF$ बनवायें। क्या, दोनों समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ तथा $ABEF$ के क्षेत्रफल आपस में बराबर हैं।

इसे निम्नांकित प्रमेय से स्पष्ट करें -

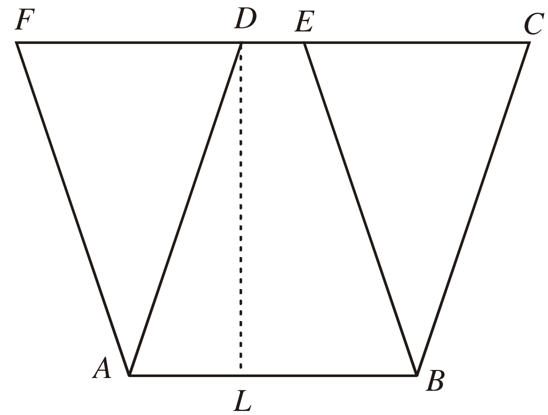


प्रमेय

"एक ही आधार व समान समान्तर रेखाओं के बीच के दो समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।"

ज्ञात कीजिए - दो समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ तथा $ABEF$ उभयनिष्ठ आधार AB पर तथा समान्तर रेखाओं AB तथा CF के बीच बने हैं।

सिद्ध करना है - समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल = समान्तर चतुर्भुज $ABEF$ का क्षेत्रफल खींचें



रचना - $DL \perp AB$ खींचें

उपपत्ति - समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ तथा $ABEF$ में

$AB = EF$ (क्यों ?)

$DL = DL$

$AB \times DL = EF \times DL$

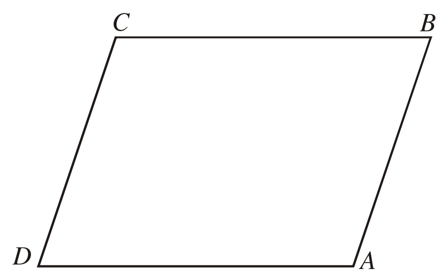
समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल

= समान्तर चतुर्भुज $ABEF$ का क्षेत्रफल

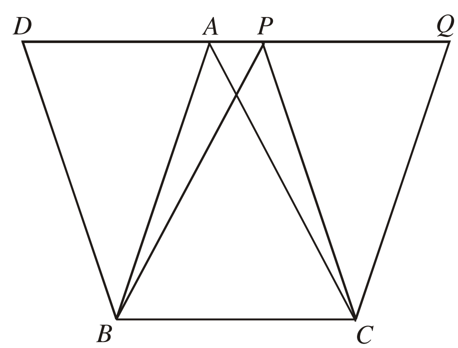
अतः एक ही आधार व समान समान्तर रेखाओं के बीच के दो समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

नोट - समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

एक ही आधार व समान समान्तर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों के क्षेत्रफल



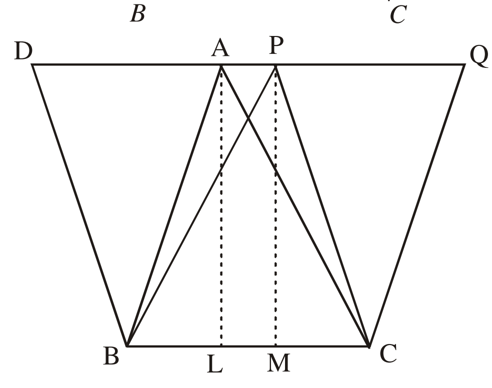
शिक्षक शिक्षार्थियों से बतायें कि पिछली कक्षा में यह पढ़ा है कि समान्तर चतुर्भुज का आधार इसकी कोई भी भुजा हो सकती है।



शिक्षार्थियों से एक ही आधार BC तथा इसके समान्तर रेखा DQ के बीच $\Delta\ ABC$ तथा $\Delta\ BPC$ बनाने को कहें। देखें कि क्या $\Delta\ ABC$ तथा $\Delta\ PBC$ आपस में समान हैं ?

इसे निम्न प्रमेय से स्पष्ट करें-

प्रमेय



"एक ही आधार पर व समान समान्तर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।"

ज्ञात है - एक आधार BC तथा समान्तर रेखाओं BC तथा DQ के बीच $\Delta\ ABC$ तथा $\Delta\ PBC$ बने हैं।

सिद्ध करना है - क्षेत्रफल $\Delta\ ABC$ = क्षेत्रफल $\Delta\ PBC$

रचना - $AL \perp BC$ तथा $PM \perp BC$ खींचे

उपपत्ति - $\Delta\ ABC$ तथा $\Delta\ PBC$ में

$BC = NC$

$AL = PM$ (क्यों ?)

$\frac{1}{2} BC \times AL = \frac{1}{2}\ BC \times PM$

क्षेत्रफल $\Delta\ ABC =$ क्षेत्रफल $\Delta\ PBC$

अतः एक ही आधार पर व समान समान्तर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

यदि दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की एक भुजा दूसरे त्रिभुज की एक भुजा बराबर हो तो संगत शीर्ष लम्बों के बीच सम्बन्ध

शिक्षार्थियों से प्रश्न करें कि यदि दो त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर हो तथा उनके आधार भी बराबर हों तो क्या उनके शीर्ष लम्ब बराबर होंगे या नहीं।

दोनों त्रिभुजों में आधार पर शीर्ष लम्ब डालवायें। दोनों शीर्ष लम्बों की लम्बाई ाात करने को कहें।

देखें कि क्या दोनों शीर्ष लम्ब आपस में बराबर हैं ?

इसे निम्नांकित प्रमेय से स्पष्ट करें -

प्रमेय

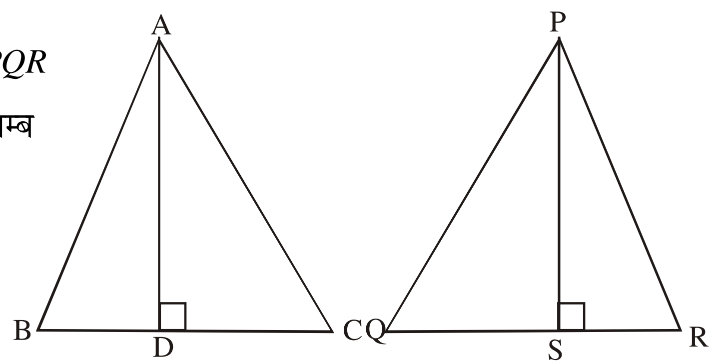
''यदि दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों और एक त्रिभुज की एक भुजा दूसरे त्रिभुज की एक भुजा के बराबर हो तो उनके संगत शीर्षलम्ब बराबर होते हैं।

ज्ञात है - $\Delta\ ABC$ तथा $\angle\ PQR$ में

क्षेत्रफल $\angle\ ABC =$ क्षेत्रफल $\angle\ PQR$

तथा $BC = QR$ और संगत शीर्ष लम्ब

AD तथा PS



सिद्ध करना है - शीर्ष लम्ब $AD = PS$

उपपत्ति - $\Delta\ ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ BC \times AD$

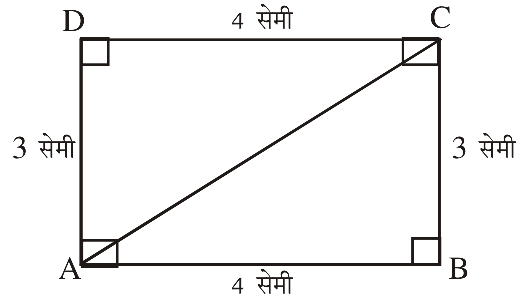
$\Delta\ PQR$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} QR \times PS$

$\therefore \Delta\ ABC$ का क्षेत्रफल $= \Delta\ PQR$ का क्षेत्रफल

$\therefore\ \frac{1}{2}\ BC \times AD = \frac{1}{2}\ QR \times PS$ $\qquad \therefore BC \times AD = QR \times PS$

$AD = PS \qquad (\because QR = BC)$

उदाहरण 1 - चित्र में Δ ABC तथा Δ ADC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दिखाइए कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग आयत के क्षेत्रफल के बराबर है।



हल - Δ ABC में, $AB = 4$ सेमी, $BC = 3$ सेमी

$\therefore \Delta$ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} AB \times BC$

$= \frac{1}{2} 4 \times 3$

= 6 वर्ग सेमी.

इसी प्रकार, Δ ADC का क्षेत्रफल = 6 वर्ग सेमी

अब आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 4 × 3

= 12 वर्ग सेमी

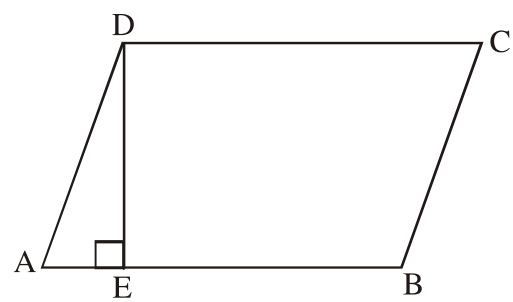
उपर्युक्त से स्पष्ट है कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग आयत के क्षेत्रफल के बराबर है।

उदाहरण 2 - एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 32 मीटर^2 है। यदि आधार और इसके संगत शीर्ष लम्ब का अनुपात 1 : 2 है, तो आधार और शीर्ष लम्ब ज्ञात कीजिए।

हल - माना समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का

क्षेत्रफल = 32 मीटर^2

आधार AB तथा इसके संगत शीर्ष लम्ब DE है।



प्रश्नानुसार $AB : DE = 1 : 2$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ DE = 2\,AB$

समान्तर चतुभ्रुज $ABCD$ का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

32 $= AB \times DE$

$= AB \times 2AB$

या AB = 16

AB = 4 मीटर

$\therefore\ DE = 2 \times 4 = 8$ मीटर

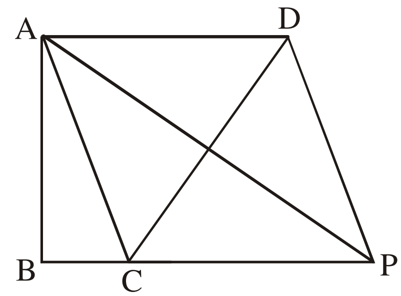
अत आधार = 4 मीटर

ऊँचाई = 8 मीटर

उदाहरण 3- $ABCD$ एक चतुर्भुज है। बिन्दु D से के समान्तर एक रेखा खींचने पर वह BC को बढ़ाने पर बिन्दु P पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल $\Delta\ ABC =\ \ ABCD$ क्षेत्रफल

दिया है - $ABCD$ में $DP \parallel AC$ है।

सिद्ध करना है - क्षेत्रफल $\Delta\ ABP$ = क्षेत्रफल $ABCD$



उपपत्ति - $\Delta\ CAD$ तथा $\Delta\ CAP$ एक ही आधार AC पर स्थित हैं, तथा $AC \parallel DP$

क्षेत्रफल $\Delta\ CAD$ = क्षेत्रफल $\angle\ CAP$ (क्यों ?)

दोनों ओर क्षेत्रफल $\Delta\ ABC$ जोड़ने पर

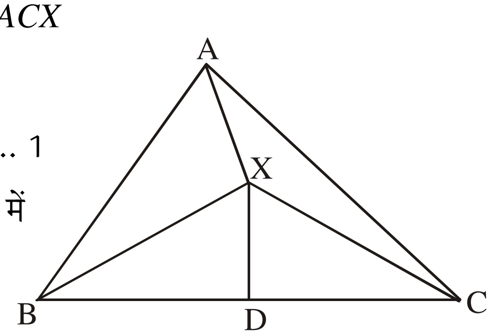
क्षेत्रफल $\Delta\ CAD$ + क्षेत्रफल $\Delta\ ABC$ = क्षेत्रफल $\Delta\ CAP$ + क्षेत्रफल $\Delta\ ABC$

क्षेत्रफल $ABCD$ = क्षेत्रफल $\Delta\ ABP$

उदाहरण 4- AD, $\Delta\ ABC$ की एक माध्यिका है। X, AD पर बिन्दु हैं। दिखाओं कि क्षेत्रफल $\Delta\ ABX$ = क्षेत्रफल $\Delta\ ACX$

हल - दिया है - $\Delta\ ABC$ में AD माध्यिका हैं। X, AD पर स्थित कोई बिन्दु है।

सिद्ध करना है - क्षेत्रफल $\Delta\ ABX$ = क्षेत्रफल $\Delta\ ACX$



उपपत्ति - $\therefore\ \Delta\ ABC$ में AD माध्यिका है।

$\therefore$ क्षेत्रफल $\Delta\ ABD$ = क्षेत्रफल $\Delta\ ACD$ .. 1

(माध्यिका त्रिभुज को समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बाँटती है)

इसी प्रकार $\Delta\ XBC$ में XD माध्यिका है।

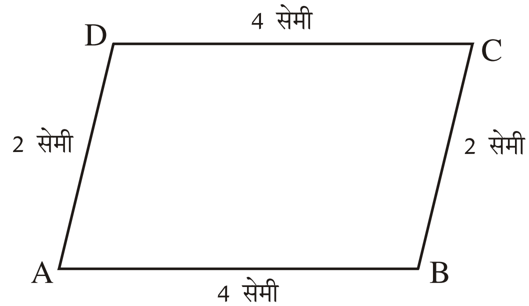
क्षेत्रफल $\Delta\ BDX$ = क्षेत्रफल $\Delta\ CDX$ ... 2

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर

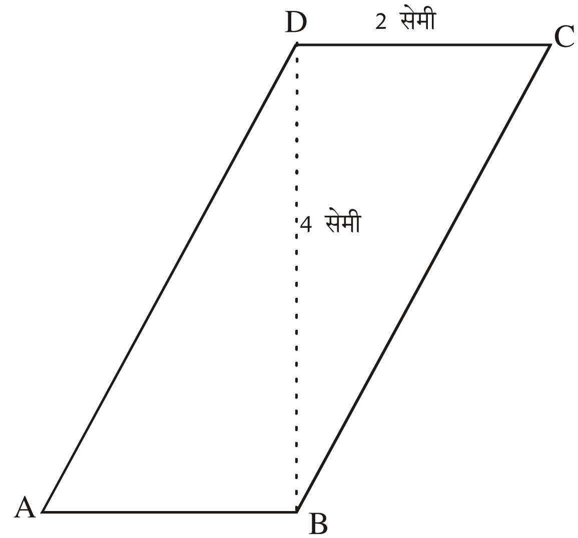
क्षेत्रफल $\Delta\ ABD$ - क्षेत्रफल $\Delta\ BDX$ = क्षेत्रफल $\Delta\ ACD$ - क्षेत्रफल $\Delta\ CDX$

क्षेत्रफल $\Delta\ ABX$ = क्षेत्रफल $\Delta\ ACX$

मूल्यांकन



- चित्र में चतुर्भुज $ABCD$ किस प्रकार का चतुर्भुज है।



- चित्र में $ABCD$ एक चतुर्भुज है, तथा BD इसका एक विकर्ण है। दिखाइए कि $\square ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात करवायें।

- एक समान्तर चतुर्भुज की कोई भुजा 8 सेमी है। यदि उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 40 वर्ग भुजा 8 सेमी हो तो भुजा के समान्तर भुजा की दूरी की गणना करवायें।

- सिद्ध करवायें कि किसी समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी ऊँचाई तथा समान्तर भुजाओं के योग के गुणनफल का आधा होता है।

- चतुर्भुज $ABCD$ में एक विकर्ण BD है। A तथा C से क्रमशः AM तथा CN विकर्ण BD पर डाले गये हैं। दिखायें कि क्षेत्रफल चतुर्भुज $ABCD = \frac{1}{2} BD\,(AM + CN)$

इकाई 4 कार्तीय तल

अध्याय 12 दो बिन्दुओं के बीच की दूरी, रेखाखण्डों को दिये अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

उद्देश्य

- कार्तीय तल एवं निर्देशांक का बोध कराना।
- दो बिन्दुओं के बीच की दूरी का ज्ञान करायेंगे।
- रेखाखण्डों को दिये हुए अनुपात में विभाजन करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक को जानेंगे।

शिक्षण बिन्दु

- कार्तीय तल तथा समकोणिक निर्देशाक्ष
- कार्तीय तल पर बिन्दुओं के निर्देशांक
- दो बिन्दुओं के बीच की दूरी
- रेखाखण्डों को दिये हुए अनुपात में विभाजन करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक

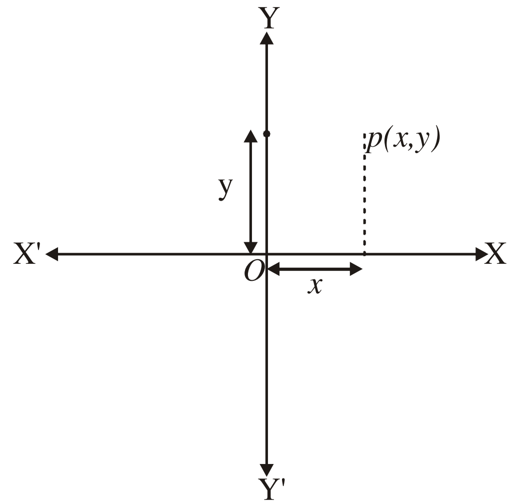
प्रस्तुतीकरण

- रेनी देकार्ते ने स्पष्ट किया है कि किस प्रकार किसी समतल में किसी बिन्दु की स्थिति दिखाई जा सकती है। उन्होंने समतल में दो परस्पर लम्ब रेखाओं से किसी बिन्दु की दूरी निकाल कर बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने की विधि का वर्णन किया।
- इसी पद्धति को कार्तीय पद्धति एवं इस प्रकार के समतल को कार्तीय तल *(Co-ordinate-plane)* कहते हैं।

समकोणिक निर्देशाक्ष एवं निर्देशांक पद्धति

किसी समतल (पेज का समतल) पर दो पारस्परिक लम्ब रेखाएँ $X'OX$ एवं YOY' खींचेगे जो कि एक दूसरे को बिन्दु O पर समकोण पर काटती हैं। रेखाएँ $X'OX$ एवं $Y'OY$ समकोणिक निर्देशाक्ष कहलाती हैं। रेखा $X'OX$ को X-अक्ष तथा रेखा YOY' को Y-अक्ष कहते हैं।

समकोणिक निर्देशाक्ष ($X'OX$ एवं $Y'OY$) एक दूसरे को जिस बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती हैं, उस बिन्दु को मूल बिन्दु कहते हैं। और इस समतल को X-Y समतल भी कहते हैं।



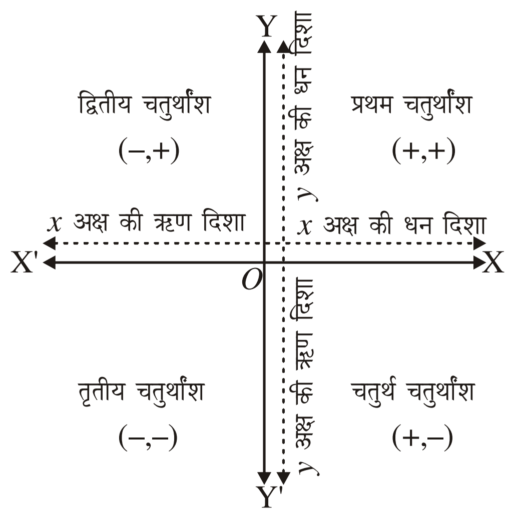
मान लिया समतल में कोई बिन्दु P हैं.जिसका निर्देशांक (x, y) है, जो कि बिन्दु P की मूल बिन्दु से X-अक्ष एवं Y-अक्ष के सापेक्ष स्थिति *(Position)* को दर्शाता है।

अत: **''किसी समतल में किसी बिन्दु का निर्देशांक उस बिन्दु की स्थिति को निर्धारित करता हैं।''**

नोट : यदि $a \neq b$ तो क्रमिक युग्म $(a, b) \neq$ क्रमिक युग्म (b, a)

चतुर्थांश *(Quadrants)*

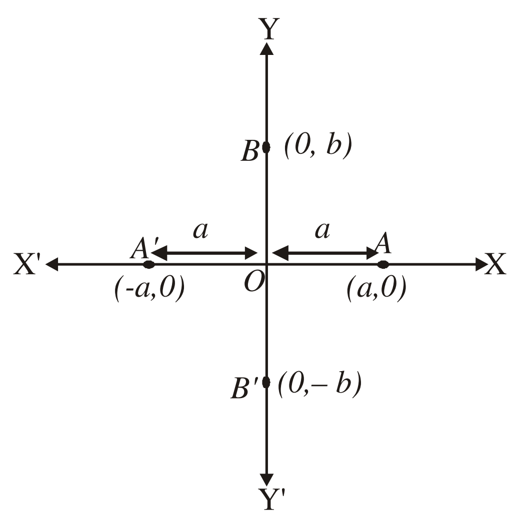
हम जानते हैं कि स्थिर सरल रेखाएँ $X'OX$ *(ie x-axis)* एवं समतल YOY'*(ie y-axis)* समतल को बराबर चार भागों में विभाजित करती हैं, जिन्हें चतुर्थांश *(quadrants)* कहते हैं। इस प्रकार XOY प्रथम चतुर्थांश, YOX' द्वितीय चतुर्थांश, $X'OY'$ तृतीय चतुर्थांश एवं $Y'OX$ चतुर्थ चतुर्थांश कहलाता है।



टिप्पणी - किसी समतल में किसी बिन्दु के निर्देशांकों में x - निर्देशांक अथवा y - निर्देशांक अथवा दोनों का धनात्मक या ऋणात्मक होना यह निर्धारित करता है कि वह बिन्दु किस चतुर्थांश में स्थित है।

अक्षो पर बिन्दु के निर्देशांक

x - अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की कोटि अर्थात् y - निर्देशांक सदा शून्य होता है।



y - अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का भुज अर्थात् x - निर्देशांक सदा शून्य होता है।

x - अक्ष पर स्थित बिन्दु का भुज a तथा y अक्ष पर स्थित बिन्दु का कोटि b है।

इसलिए बिन्दु A, A' एवं B, B' के निर्देशांक क्रमशः $(\pm a, o)$ एवं $(o, \pm b)$ हैं।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी *(Distance between two given points)*

मान लिया समतल में दो बिन्दु P एवं Q हैं जिनके निर्देशांक $(x_1 y_1)$ एवं $(x_2 y_2)$ हैं। बिन्दु $P(x_1 y_1)$ एवं $Q(x_1 y_1)$ से लम्ब X-अक्ष पर क्रमश PM एवं QN डाला, बिन्दु P से रेखा QN पर लम्ब PR डाला

$OM = x_1$ एवं $PM = y_1$ - निर्देशांक से

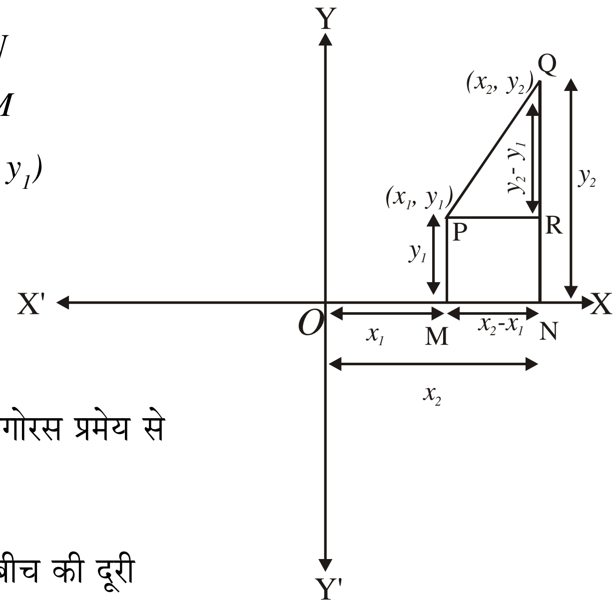
$ON = x_2$ एवं $QN = y_2$ - निर्देशांक ज्यामिति

$\therefore\ MN = ON - OM$

$MN = (x_2 - x_1)$ एवं $QR = QN - RN$

$QR = QN - PM$

$PR = MN = (x_2 - x_1)$ एवं $QR = (y_2 - y_1)$



समकोण $\Delta\ PQR$ में

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2$$

$$PQ = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ पाइथागोरस प्रमेय से

चूकि दूरी सदैव धनात्मक होती है, अतः

दो दिये हुए बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

या दो बिन्दुओं के बीच की दूरी $= \sqrt{(x - \text{निर्देशांको का अन्तर})^2 + (y - \text{निर्देशांको का अन्तर})^2}$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

उपप्रमेय - मूल बिन्दु तथा किसी बिन्दु (x_1, y_1) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$$

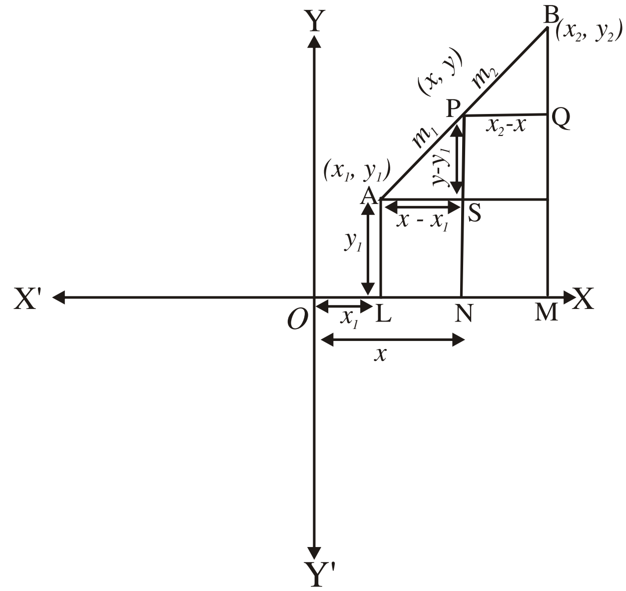
$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

अतः बिन्दु $(x_1 y_1)$ की मूल बिन्दु से दूरी $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना जो दिये हुये दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को दिये हुए अनुपात में विभाजित करता है -

प्रथम स्थिति : अन्त विभाजन - जब अभीष्ट बिन्दु P, A एवं B को मिलाने वाली रेखा को अन्तः विभाजित करता है।

मान लिया इस रेखाखण्ड AB पर स्थित कोई बिन्दु $P(x, y)$ है, जो रेखाखण्ड AB को अनुपात $m_1 : m_2$ में अन्तः विभाजित करता है।



अन्तः विभाजन की स्थिति में बिन्दु $P(x, y)$, बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और बिन्दु $B(x_2, y_2)$ के बीच में स्थित है।

निम्नांकित आकृति से

$AS = (x - x_1)$ एवं $PS = (y - y_1)$

$PQ = (x_2 - x)$ एवं $BQ = (y_2 - y)$

बिन्दु P, रेखाखण्ड AB को अनुपात $m_1 : m_2$ में अन्तः विभाजित करता है।

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$$

$\Delta\, ASP$ के कोण $\Delta\, PQB$ के संगत कोणों के बराबर हैं।

अतः $\Delta\, ASP \sim \Delta\, PQB$ है।

$$\frac{AS}{PQ} = \frac{SP}{BQ} = \frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m_1}{m_2} \ldots\ldots \qquad (1)$$

$or\ (x - x_1)\, m_2 = m_1 (x_2 - x)$

$m_2 x - m_2 x_1 = m_1 x_2 - m_1 x$

$(m_1 + m_2)\, x = m_1 x_2 + m_2 x_1$

$$x = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}\right)$$

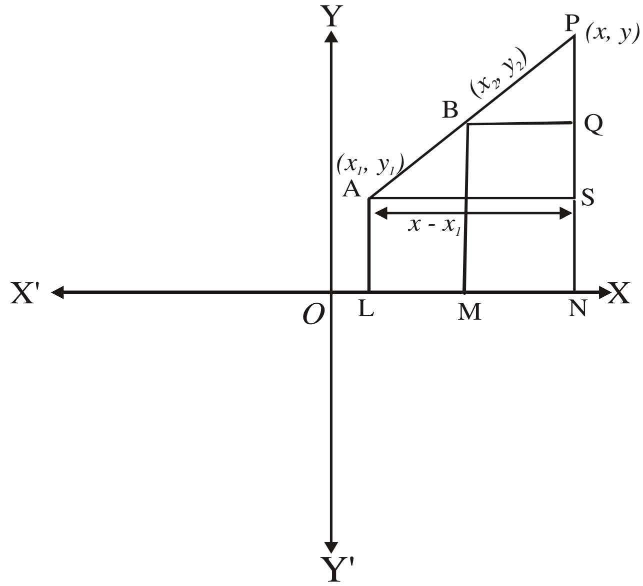
इसी प्रकार समीकरण (1) से

$$y = \left(\frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

अतः बिन्दु P के निर्देशांक $\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$

द्वितीय स्थिति : (बाह्य विभाजन)

मान लिया बिन्दु $P(x, y)$ बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ से खींचे जाने वाले रेखाखण्ड को $m_1 : m_2$ $(m_1 > m_2)$ के अनुपात में बाह्यतः विभाजित करता है। बाह्यतः विभाजन की स्थिति में बिन्दु $P(x, y)$ बिन्दु $A(x_1, y_1)$ एवं बिन्दु $B(x_2, y_2)$ से खीचे जाने वाले रेखाखण्ड के बाहर है।



स्पष्ट है कि

$AS = x - x_1$ एवं $SP = y - y_1$

$BQ = x - x_2$ एवं $QP = y - y_2$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$$

चूँकि $\Delta\, ASP$ एवं $\Delta\, BQP$ समरूप त्रिभुज हैं।

$$\frac{AS}{BQ} = \frac{SP}{QP} = \frac{PA}{PB}$$

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{m_1}{m_2} \qquad \text{..........} \ (1)$$

$m_1 (x - x_2) = m_2 (x - x_1)$

$m_1 x - m_1 x_2 = m_2 x - m_2 x_1$

$(m_1 - m_2)\, x = m_1 x_2 - m_2 x_1$

$$x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}$$

इसी प्रकार समीकरण (1) से

$$y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

अतः बिन्दु P के निर्देशांक $\left(\dfrac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2} \cdot \dfrac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}\right)$

टिप्पणी - मान लिया दो बिन्दु A एवं B जिसके निर्देशांक (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) हैं और बिन्दु $P(x, y)$ जो कि रेखाखण्ड AB को समान भागों में अन्तः विभाजित करता है।

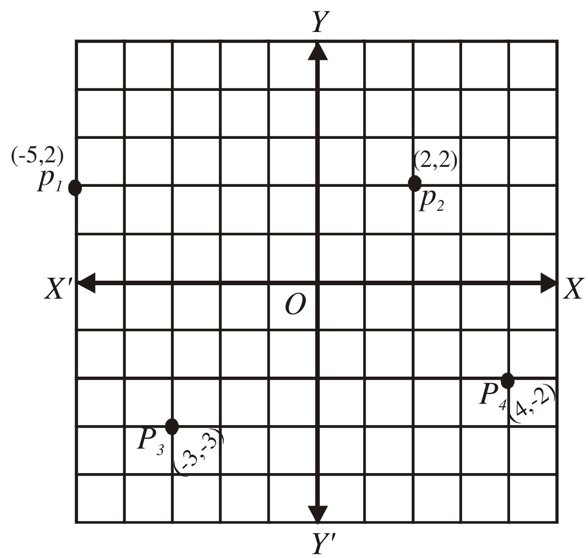
$AP = PB = m_1 = m_2$

अतः बिन्दु P के निर्देशांक $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

अतः बिन्दु $A\ (x_1\ ,\ y_1)$ और बिन्दु $B\ (x_2,\ y_2)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु का निर्देशांक $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ है।

बिन्दुओं का आलेखन

यदि किसी बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात हो, तो चित्र में निम्न प्रकार से आलेखन किया जा सकता है। मान लिया किसी बिन्दु के निर्देशांक (-5, 2) हैं, तो पहले दिशा OX' में Y-अक्ष के बाई ओर 5 इकाई की लम्बाई गिनिए और फिर दिशा OY में X-अक्ष के ऊपर की ओर 2 इकाई गिनिए। इस प्रकार एक बिन्दु X-अक्ष पर और एक बिन्दु Y-अक्ष पर प्राप्त होगा। अब X-अक्ष के बिन्दु से Y-अक्ष के समान्तर और Y-अक्ष के बिन्दु से X-अक्ष के समान्तर रेखाएँ खींचिए। ये दोनों रेखाएँ परस्पर एक दूसरे को जिस बिन्दु पर मिलेंगी वही बिन्दु उपर्युक्त बिन्दु की स्थिति होगी।



यह ध्यान रखना आवश्यक है कि लम्बाइयाँ सदा मूल बिन्दु से ही दोनों अक्षों पर गिनी जाती हैं।

संलग्न चित्र में P_2, P_3, P_4 बिन्दुओं के निर्देशांक क्रमशः (2, 2), (-3, -3), (4, -2) हैं।

इस प्रकार ग्राफ-पेपर पर हम उपरोक्त बिन्दुओं का आलेखन कर सकते हैं।

उदाहरण 1 – एक बिन्दु के निर्देशांक $(a \sin \alpha, a \cos \alpha)$ हैं तो मूलबिन्दु से इसकी दूरी ज्ञात कीजिए।

हल – माना $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$(x_2, y_2) = (a \sin \alpha, a \cos \alpha)$

मूल बिन्दू से दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(a \sin \alpha - 0)^2 + (a \cos \alpha - 0)^2}$

$= \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha}$

$= \sqrt{a^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}$

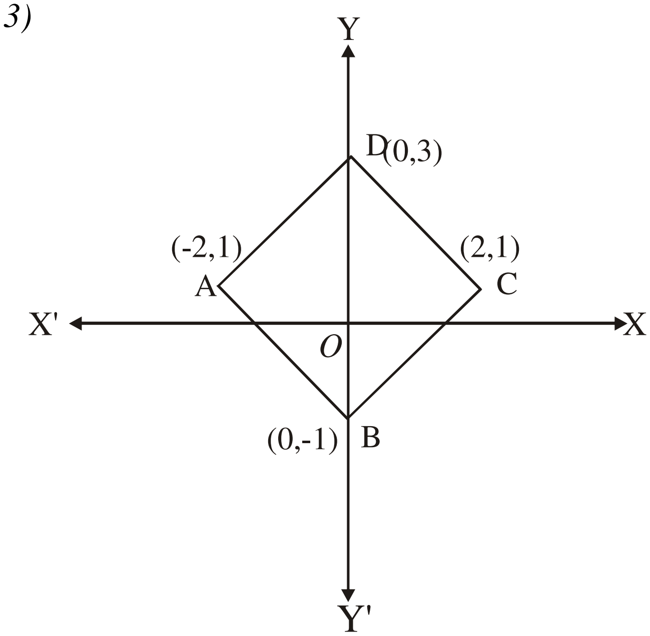
$= \sqrt{a^2} = a$

$= a$

अतः मूल बिन्दु से दूरी $= a$ मात्रक

उदाहरण 2- सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $A(-2, 1)$, $B(0, -1)$, $C(2, 1)$ और $D(0, 3)$ एक वर्ग के शीर्ष हैं।

हल - $A(-2, 1)$, $B(0, -1)$, $C(2, 1)$ और $D(0, 3)$ दिये हुए चार बिन्दु हैं



$AB = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$

$AB = \sqrt{4+4}$

$AB = \sqrt{8}$

$AB = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$

$BC = \sqrt{4+4}$, $BC = \sqrt{8}$

$BC = 2\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$

$CD = \sqrt{4+4}$ $CD = 2\sqrt{2}$

$DA = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$

$DA = \sqrt{4+4}$ $DA = 2\sqrt{2}$

विकर्ण $AC = \sqrt{(-4)^2 + 0^2}$

$AC = \sqrt{16}$ $AC = 4$

कर्ण $BD = \sqrt{0^2 + (4)^2}$

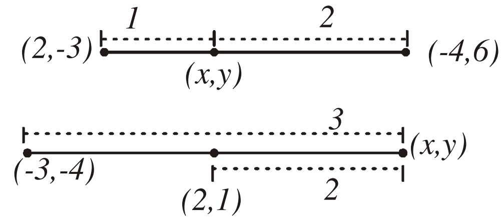
$BD = \sqrt{16}$

$BD = 4$

इस प्रकार चतुर्भुज $ABCD$ में चारों भुजायें AB, BC, DC, DA आपस में बराबर हैं और कर्ण AC एवं BD भी आपस में बराबर हैं।

अतः $\square ABCD$ एक वर्ग होगा, इस प्रकार A, B, C एवं D एक वर्ग के शीर्ष हैं।

उदाहरण 3- उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (-3, -4) और $(2, 1)$ से खींचे गये रेखाखण्ड को 3 : 2 के अनुपात में वाह्यतः विभाजित करता है।



हल - माना $(x_1, y_1) = (-3, -4)$

$(x_2, y_2) = (2, 1)$

$m_1 : m_2 = 3 : 2$

माना बाह्यतः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक = (x, y)

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$$

$$= \frac{3\times2-2\times(-3)}{3-2}, \frac{3\times1-2\times(-4)}{3-2}$$

$$= \left(\frac{6+6}{1}, \frac{3+8}{1}\right)$$

बिन्दु के निर्देशांक $= (12, 11)$

उदाहरण 4 - उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(2, -3)$ और $(-4, 6)$ के बीच की दूरी को $1 : 2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

हल - माना $(x_1, y_1) = (2, -3)$

$(x_2, y_2) = (-4, 6)$

$m_1 : m_2 = 1 : 2$

माना अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक = (x, y)

$$\text{अतः} \quad (x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= \left(\frac{1\times(-4)+2\times2}{1+2}, \frac{1\times6+2\times(-3)}{1+2}\right)$$

$$= \left(\frac{-4+4}{3}, \frac{6-6}{3}\right)$$

$$= (0, 0)$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $= (x, y) = (0, 0)$

उदाहरण 5 - बिन्दु A एवं B के निर्देशांक क्रमशः $(0, -6)$ एवं $(-6, 8)$ हैं। इनके मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए

हल - माना $(x_1, y_1) = (0, -6)$

$(x_2, y_2) = (-6, 8)$

मध्य बिन्दु के निर्देशांक $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{0-6}{2}, \frac{-6+8}{2}\right)$

अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $(-3, 1)$

मूल्यांकन

- बिन्दुओं , $(0, -3)$ एवं $(-4, 0)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
- दो बिन्दुओं के निर्देशांक $(-8, 0)$ और $(0, -8)$ हैं। इन बिन्दुओं से बने रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
- बिन्दु $(8, -8)$ एवं $(-4, -5)$ बिन्दु किस चतुर्थांश में होंगे।
- एक वृत्त के व्यास के सिरों के निर्देशांक (7, -1) तथा (5, 3) हैं। उसके केन्द्र के निर्देशांक तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
- एक त्रिभुज के शीर्ष (0, 2), (2, -2) और (4, 6) है। उस माध्यिका की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो शीर्ष (4, 6) से सामने वाली भुजा पर खींची गयी है।

अध्याय 13 त्रिभुज का क्षेत्रफल

उद्देश्य

- निर्देशांक ज्यामिति के द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।
- संरेख बिन्दुओं का बोध कराना।
- बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबन्ध ज्ञात करेंगे।

शिक्षण बिन्दु

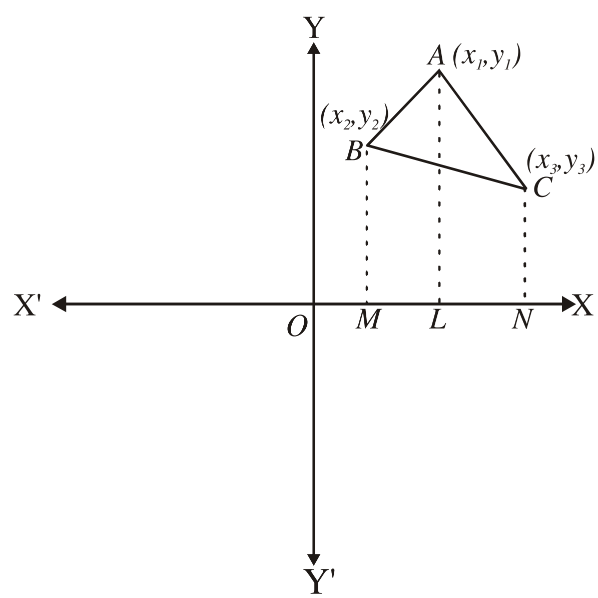
- त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालना जब शीर्षों के निर्देशांक दिये हों।
- संरेख बिन्दु।
- बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबन्ध।

प्रस्तुतीकरण

शीर्षों के निर्देशांक दिए होने पर त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालने के लिए हम समलम्ब के क्षेत्रफल के सूत्र का उपयोग करेंगे जो निम्न हैं :

समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समानतर भुजाओं का योग) $\times$ (इनके बीच लाम्बिक दूरी)

त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालना जब शीर्षों के निर्देशांक दिये हों



मान लिया ΔABC कोई त्रिभुज हैं और उसके शीर्षों A B और C के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हैं।

बिन्दुओं A,B,C से X-अक्ष पर लम्ब क्रमशः AL, BM, CN डालिए

स्पष्ट है कि $\quad ML = OL - OM = x_1 - x_2$

$LN = ON - OL = x_3 - x_1$

$$MN = ON - OM = x_3 - x_2$$

और $\quad LA = y_1 \qquad MB = y_2 \qquad NC = y_3$

अत: त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

= समलम्ब $ABML$ का क्षेत्रफल + समलम्ब $ALNC$ का क्षेत्रफल - समलम्ब $BMNC$ का क्षेत्रफल

$\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (MB + AL) \times ML + \frac{1}{2} \times (AL + NC) \times LN - \frac{1}{2} \times (MB + CN) \times MN$

$$= \frac{1}{2} \times (y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} \times (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2} \times (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\, [\, (x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3) - (x_3y_2 + x_3y_3 - x_2y_2 - x_2y_3)]$$

$$= \frac{1}{2} \times (x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_1 + x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_3y_3 + x_2y_2 + x_2y_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times [\, (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]$$

$$= \frac{1}{2} \times [\, (x_1y_2 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_2y_1) + (x_3y_1 - x_3y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} \times [\, x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

अत: $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times [\, x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

टिप्पणी : यदि किसी त्रिभुज के क्षेत्रफल का मान ऋणात्मक प्राप्त होता है तो उसका निरपेक्ष मान को लिखते हैं।

संरेख बिन्दु *(Collinear Point)*

तीन बिन्दु $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$और $C\,(x_3, y_3)$ संरेख कहलाते हैं जब वे एक रेखा में स्थित हों।

अत: तीन संरेख बिन्दु $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$और $C\,(x_3, y_3)$द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

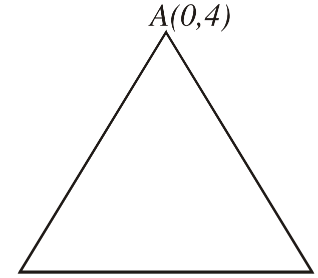
बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबन्ध

दिय हुए तीन बिन्दु $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$और $C\,(x_3, y_3)$ संरेख होंगे। जब इनसे निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

अर्थात् $\frac{1}{2} \times [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] = 0$

अर्थात् $[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] = 0$

उदाहरण 1 - बिन्दुओं $(0, 4), (0, -4)$ और $(6, 0)$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए



हल - मान लीजिए कि इन बिन्दुओं से बना त्रिभुज ΔABC है

जहाँ $A (x_1, y_1) = (0, 4)$

$B (x_2, y_2) = (0, -4)$

$C(x_3, y_3) = (6, 0)$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2} \times [0(-4 -0) + 0(0 - 4) + 6 (4 -4)]$

$= \frac{1}{2} \times [6 \times 4]$

अतः ΔABC का क्षेत्रफल = 24 वर्ग इकाई

उदाहरण 2 - उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक $[a, (c+a)]$ $[a, c]$ और $[-a, (c-a)]$ हैं।

हल - माना त्रिभुज ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक

जहाँ $A (x_1, y_1) = (a, c+a)$

$B (x_2, y_2) = [a, c]$

$C(x_3, y_3) = [-a, c-a]$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2} \times [a(c-c + a) + a(c - a - c - a,) - a (c + a - c)]$

$= \frac{1}{2} \times [a(a) + a (-2a) - a (a)]$

$= \frac{1}{2} \times [a^2 - 2a^2 - a^2]$

$= \frac{1}{2} \times [- 2a^2] \quad = \ - a^2$

चूँकि त्रिभुज के क्षेत्रफल का निरपेक्ष मान लिखते हैं।

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = = a^2 वर्ग इकाई

उदाहरण 3- सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $\{b, (c+a)\}, \{c, (a+b)\}$ और $\{a,(b+c)\}$ संरेख है।

हल - माना बिन्दु A, B, C के निर्देशांक

$$A (x_1, y_1) = \{b, (c+a)\}$$

$$B (x_2, y_2) = \{c, (a+b)\}$$

$$C (x_3, y_3) = \{a,(b+c)\}$$

तीन बिन्दु $A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3)$ संरेख होंगे यदि

$$[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] = 0$$

यहाँ $[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] = b(a+b-b-c) + c(b+c-a-c)+a (c+a-a-b)$

$= b (a -c) + c (b - a) + a (c -b)$

$= ab - bc + bc - ac + ac - ab$

$= 0$ इसलिए दिये हुए बिन्दु संरेख होंगे।

उदाहरण 4- सिद्ध कीजिए कि तीन बिन्दु जिनके निर्देशांक $(3, 3) (h, o), (o, k)$ हैं, संरेख होंगे यदि $\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=\frac{1}{3}$ ।

हल - माना तीन बिन्दु जिनके निर्देशांक क्रमशः

$A (x_1, y_1) = (3, 3)$

$B (x_2, y_2) = (h, o)$

$C (x_3, y_3) = (o, k)$ हैं।

दिये हुए तीन बिन्दु संरेख होगे यदि

अर्थात $[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$

या $3 (0 - k) + h (k - 3) + k (3 - 0) =$

या $- 3k + hk - 3h = 0$

या $3k - 3h = - hk$

या $3 (k + h) = hk$

या $h+ k = \frac{hk}{3}$

= $\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=\frac{1}{3}$ इति सिद्धम

मूल्यांकन

- उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्षों के निर्देशांक $(0, 0), (2, 0)$ और $(0, 3)$ हैं।
- दिखाइयें कि बिन्दु $(3, -2), (4, 0), (6, -3)$ और $(5, -5)$ एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
- सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(6, 9), (0, 1)$ और $(-6, -7)$ संरेख हैं।
- यदि बिन्दु $(-1, 3), (4, -2)$ तथा (a, b) संरेख हैं तो सिद्ध कीजिए कि $a + b = 2$
- यदि बिन्दु $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ और $(p_1 - p_2, q_1 - q_2)$ संरेख हों तो सिद्ध कीजिए कि $p_1q_2 = p_2q_1$

प्रोजेक्ट कार्य 1

उद्देश्य

विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों की वास्तुकला एवं निर्माण में भूमिका का अध्ययन करना।

पृष्ठभूमि

प्राचीन समय में हवन की वेदियों के निर्माण में ज्यामितीय आकृतियों का प्रयोग होता था। ये वेदियाँ या हवन कुण्ड त्रिभुजाकार, वर्गाकार, पंचभुजाकार, षष्टभुजाकार बनायी जाती थीं। मोहनजोदड़ों एवं हड़प्पा की खुदाई में मिले मिट्टी के भांडो के बाहरी तलों पर अनेक ज्यामितीय आकृतियाँ पायीं गयी हैं।

विभन्न भवनों एवं धार्मिक स्थलों के निर्माण में वास्तुकार ज्यामिति-आकृतियों का प्रयोग कर भवनों की सुन्दरता में वृद्धि करते हैं। धार्मिक स्थलों के भवनों के ऊपर सुन्दरता एवं विशिष्टता प्रदान करने हेतु ज्यामितीय आकृतियों का प्रयोग किया जाता है। जो गोलाकार, शंक्वाकार, प्रिज्म के आकार का, पिरैमिड के आकार का तथा चन्द्राकार होती हैं।

भवनों की छतों एवं नदी के पुलों आदि के निर्माण में मेहराब (चन्द्राकार आकृति या वृत्त खण्ड) के द्वारा सुन्दरता के साथ-साथ मजबूती प्रदान की जाती थी।

वर्णन / प्रस्तुतीकरण

किसी भवन के सम्बन्ध में ज्यामितीय आकृतियों का वास्तुकला एवं निर्माण में भूमिका के अध्ययन हेतु भवनों को देखकर निम्नांकित प्रकार सारणी तैयार की जा सकती है।

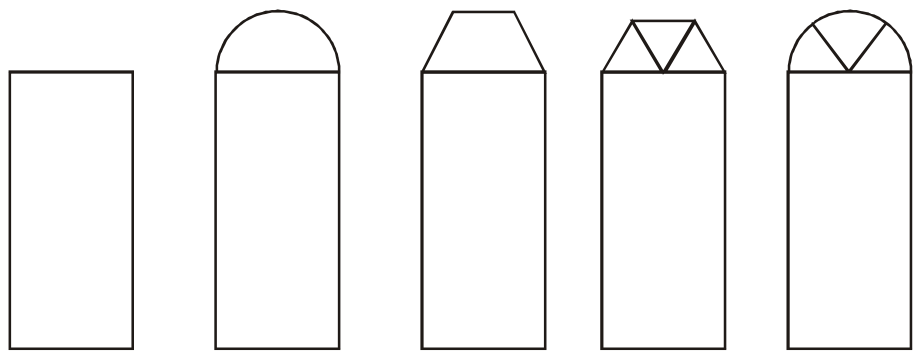
भवन के भाग	**ज्यामितीय आकृतियाँ**
दरवाजा	आयताकार (दरवाजे का ऊपरी भाग - अर्द्धवृत्ताकार, समलम्ब आकार)
खिड़की	आयताकार, वर्गाकार (खिड़की का ऊपरी भाग - अर्द्धवृत्ताकार, समलम्ब आकार)
रोशनदान	आयताकार, वर्गाकार, वृत्ताकार
ग्रिल	आयताकार, वर्गाकार, त्रिभुजाकार, वृत्ताकार, अर्द्ध वृत्ताकार (चन्द्राकार) अन्य आकार
टाइल्स	आयताकार, वर्गाकार

इसके अतिरिक्त खम्भों का आकार - बेलन तथा प्रिज्म के आकार का होता है।

शिक्षार्थियों को निर्देश दें कि वे अपने-अपने घरों के फर्नीचर दरवाजे, खिड़की, रोशनदान, आलमारी, छत की रेलिंग, फर्श की टाइल्स, ग्रिल इत्यादि में प्रयुक्त ज्यामितीय आकृतियों का अवलोकन कर सारणीबद्ध करें।

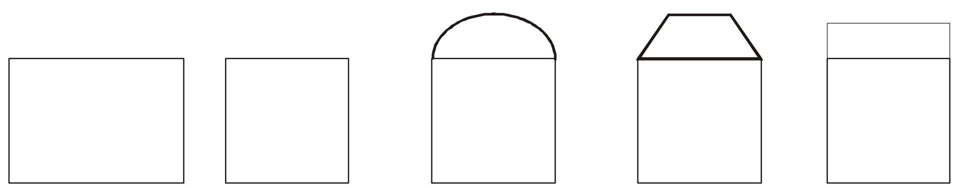
प्रयुक्त ज्यामितीय आकृतियों का चित्र द्वारा प्रदर्शन

दरवाजा



(i) *(ii)* *(iii)* *(iv)* *(v)*

खिड़की

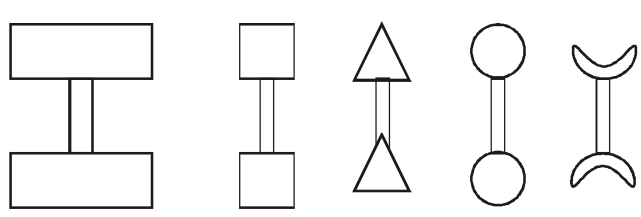


(i) *(ii)* *(iii)* *(iv)* *(v)*

रोशनदान

(i) *(ii)* *(iii)* *(iv)* *(v)*

ग्रिल (ग्रिल की डिजाइन)



(i) *(ii)* *(iii)* *(iv)* *(v)*

प्राचीन काल के कुछ भवनों की वास्तुकला में ज्यामितीय आकृतियों की भूमिका

ताजमहल

ताजमहल मुगल वास्तुकला का उत्कृष्ट नमूना है। ताजमहल का दरवाजा आयताकार इसके ऊपर का भाग वृत्तखण्ड का है। खिड़कियाँ भी इसी प्रकार की हैं। गुम्बद गोले की तरह हैं। मीनारें बेलनाकार हैं। ताजमहल सफेद संगमरमर की इमारत उत्तर प्रदेश के आगरा शहर में स्थित है। इसे मुगल बादशाह शाहजहाँ ने अपनी तीसरी पत्नी मुमताज महल की याद में बनवाया था। ताजमहल का निर्माण कार्य 1653 में समाप्त हुआ। 1983 में ताजमहल यूनेस्को विश्व धरोहर स्थल बना। ताजमहल को इस्लामी कला का रत्न भी घोषित किया गया है।

शेख सलीम चिश्ती की दरगाह

भवन के ऊपर अर्द्ध गोले बने हुए हैं। इसके नीचे आयताकार पट्टिया बनी हैं। इसमें समान्तर चतुर्भुज तथा समलम्ब का आकार भी बना है।

खम्भे प्रिज्म के आकार के दिखलायी पड़ते हैं। मूलरूप से दरगाह रेड-सैंड स्टोन की बनी थी किन्तु बाद में अकबर ने सूफी संत सलीम चिश्ती के सम्मान में इसे संगमरमर से बदल दिया। अकबर ने दरगाह में अपने पुत्र के लिये मन्नत मागी थी और उसका नाम सलीम रखा था, जो कि बाद में जहाँगीर के नाम से जाना गया।

पंचमहल (फतेहपुर सीकरी)

सबसे ऊपर का गुम्बद अर्द्ध गोलीय है। खम्भे बेलानाकार तथा इसके नीचे के भाग आयताकार तथा समलम्ब के आकार का है। पंचमहल फतेहपुर सीकरी में पाँच मंजिल इमारत है जिसे बादशाह अकबर ने बनाया था। पंचमहल बादशाह अकबर के मनोरंजन का स्थान था।

बुलन्द दरवाजा (फतेहपुर सीकरी)

दरवाजा आयाताकार जिसके ऊपर अर्द्ध वृत्ताकार बना है। खिड़कियाँ इसी प्रकार की हैं। ऊपर अर्द्धगोलीय गुम्बद बने हैं। बुलन्द दरवाजा उ0प्र0 में आगरा से 43 किमी दूर फतेहपुर सीकरी नामक स्थान पर स्थित है। इसका निर्माण 1602 में बादशाह अकबर ने कराया था। 42 सीढ़ियों के ऊपर स्थित बुलन्द दरवाजा 53.63 मीटर ऊँचा और 35 मीटर चौड़ा है।

सिकन्दरा

दरवाजे आयताकार जिसका ऊपरी भाग अर्द्ध वृत्ताकार है। पार्श्व चित्र में मीनारें बेलनाकार दिखलायी पड़ रही हैं। आगरा से चार किमी की दूरी पर सिकंदरा में अकबर का मकबरा स्थित है। इसका निर्माण कार्य अकबर ने शुरू करवाया था किन्तु इसके पूरा होने से पहले ही अकबर की मृत्यु हो गई। बाद में जहाँगीर ने इसे पूरा कराया। यह मकबरा हिन्दू, इसाई, इस्लाम, बौद्ध और जैन कला का सर्वोत्तम मिश्रण है।

राधास्वामी मन्दिर

इसके दरवाजों की बनावट में मुगलकालीन इमारतों की अपेक्षा कुछ भिन्नता है। आयताकार दरवाजे के ऊपर वृत्त खण्ड बनाकर अर्द्धवृत्त बनाया गया है।

राधास्वामी आगरा में स्थित पुराने न्यास में से एक है। यह लगभग 100 एकड़ जमीन में आगरा के उत्तर में दयालबाग क्षेत्र में स्थित है। ऐसा माना जाता है कि इसके संस्थानक स्वामी जी महाराज की मृत्यु के पश्चात यह निर्णय लिया गया कि उनकी समाधी को मन्दिर के रूप में उनकी यादगार में बनाया जाये। इस मन्दिर का निर्माण कार्य वर्ष 1900 से प्रारम्भ हुआ है और यह लगातार बन रहा है।

शिक्षार्थियों को निर्दिष्ट करें

कि वे अन्य भवनों को देखकर उसमें ज्यामितीय आकृतियों के प्रयोग का अध्ययन करे।

निष्कर्ष

विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों की वास्तुकला एवं निर्माण में प्रयोग कर भवनों की सुन्दरता बढ़ा दी जाती है। इसके साथ ही भवनों की विशिष्ट पहचान भी होती है।

प्रोजेक्ट 2

उद्देश्य

➲ पाई की खोज π

भूमिका

ऐसा अनुमान है कि जब पहिये का अविष्कार हुआ तब पहिये की परिधि की माप की भी आवश्यकता हुई। इस प्रयास में गणितज्ञों को सुविधा के लिए पहिये द्वारा एक चक्कर में चली दूरी की माप करना महत्वपूर्ण लगा। इस दूरी को मापने के लिए पहिये को एक निश्चित बिन्दु से एक चक्कर चला कर तय की गई दूरी को नापने पर देखा गया कि यह दूरी पहिये के व्यास के तीन से कुछ अधिक है और यह एक स्थिर अनुपात है।

परिभाषा

एक वृत्त की परिधि और उसके व्यास के अनुपात को निरूपित करने वाले स्थिरांक (नियतांक) को π (पाई) कहते हैं।

π का परिचय

ग्रीक वर्णमाला का 16 वाँ अक्षर π (पाई) के नाम से विख्यात है। प्राचीन ग्रीक साहित्यों मे संख्या 80 को π (पाई) से निरूपित किया जाता था। बाद में विलियम जॉन (1706) ने अपनी गणनाओं में π को विशष रूप से प्रयोग किया। उन्होंने वृत्त की परिधि और व्यास के अनुपात को π द्वारा दर्शाया। इसे बाद में अन्य गणितज्ञों ने भी स्वीकार किया।

सांकेतिक रूप से $\pi = \frac{c}{d}$ जहाँ पर

C = परिधि *(cercumfernce)* और

d = व्यास *(diameter)*

गणितज्ञों ने π के महत्व को समझा और सम्पूर्ण विश्व को इसके महत्व की जानकारी दी। जिनमें आर्किमिडीज लियोनहार्ड यूलर, कार्ल फ्रेडरिक गॉस, न्यूटन, जॉन वान न्यूमन्न आदि हैं।

लियोनहार्ड यूलर ने 1748 में अपनी गणनाओं में ग्रीक अक्षर π का प्रयोग करके इसको प्रसिद्ध कर दिया। विलियम जोन्स ने 1706 में अपनी पुस्तक ''गणित के नवीनतम परिचय'' में π का प्रयोग किया था क्योंकि यह पेरीफेरी *(Periphery)* शब्द की ग्रीक स्पेलिंग में पहला अक्षर था, *sine* तथा *cosine* फलनों में भी π का प्रयोग किया जाता है, कोणों के आधार पर त्रिकोणमितीय फलनों को ज्ञात किया जाता है। कोण की माप रेडियन में निकालने के लिए π का महत्वपूर्ण स्थान हैं।

कोण की माप, $180^0 = \pi$ रेडियन

$1^0 = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

आर्किमिडीज ने π का मान लगभग $\frac{22}{7}$ बताया। इसे गणना कार्यों को सरल बनाने में उपयोग किया जाता है। भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट ने 499 ई0 का π मान 3.1416 निकाला। यह आज भी विश्व में सर्वमान्य है। रामानुजन ने π के अधिक से अधिक शुद्ध मान ज्ञात करने के लिए अनेक सूत्र प्रस्तुत किये हैं। ये सूत्र अब कम्प्यूटर द्वारा π के लाखों दशमलव अंकों तक शुद्ध मान ज्ञात करने के लिये कारगर सिद्ध हो रहे हैं।

ध्यान दीजिये

कि π एक अपरिमेय संख्या है जिसे परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता केवल इसका निकटतम मान $\frac{22}{7}$ या 3.1416 लिया जाता है।

आवश्यक सामग्री

एक रुपया, दो रुपया, पाँच रुपया, और दस रुपये का सिक्का, पेन्सिल, स्केचपेन, मजबूत डोरा, चार्ट पेपर।

क्रिया विधि

एक रुपये के सिक्के को कागज के ऊपर रखकर सिक्के पर एक चिन्ह बना लीजिए। इस चिन्ह से धागे को सिक्के की परिधि पर लपेटते हुए पुनः चिन्ह तक लाकर काट लीजिए। इस कटे हुये धागे की लम्बाई को नाप लीजिए तथा इसी सिक्के का व्यास नाप लीजिए।

अब इसी प्रकार अन्य सिक्कों 2 रुपया, 5 रुपया और 10रुपया के सिक्कों की परिधि और व्यास की नाप लीजिए। एक सारणी बना कर सिक्कों की परिधि और व्यास की नापों को सारणी में अंकित कीजिए।

सारणी

सिक्के	c सेमी	d सेमी	$\frac{c}{d}$	निकटतम मान
एक रुपया	7.6	2.4	$\frac{7.6}{2.4}$	3.16
दो रुपया	7.5	2.4 निकटतम	$\frac{7.5}{2.4}$	3.12
पाँच रुपया	7.4	2.3	$\frac{7.4}{2.3}$	3.17
दस रुपया	8.5	2.7	$\frac{8.5}{2.7}$	3.14

परिणाम

उपर्युक्त सारणी से $\frac{c}{d}$ का औसत निकटतम मान 3.14 प्राप्त होता है।

निष्कर्ष

वृत्त की परिधि और व्यास के अनुपात का निकटतम मान 3.14 होता है।

π का उपयोग

विभिन्न प्रकार की वक्र आकृतियों जैसे-बेलन, शंकु, गोले का आयतन और वक्रपृष्ठ निकालने के सूत्रों में प्रयोग किया जाता है।

वृत्ताकार, बेलनाकार, शंक्वाकार, गोलाकार, इमारतों और आकृतियों के पृष्ठों पर पेन्ट, पॉलिस के लिये प्रयुक्त होने वाली सामग्री की मात्रा एवं खर्च ज्ञात करने के लिये गणना में प्रयोग किया जाता है।

आज सुपर कम्प्यूटरों की क्षमता प्रायः इस परीक्षण से आँकी जाती है कि वे π का मान कितने, दशमलव अंकों तक कितने समय में प्रस्तुत कर देते हैं।

प्रोजेक्ट 3(क) सर्व समिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का क्रियात्मक सत्यापन

आवश्यक सामग्री

तीन रंग (लाल, हरा, पीला) के ग्लेज पेपर, दफ्ती, थर्मोकोल, कैंची, पेन्सिल और गोंद आदि

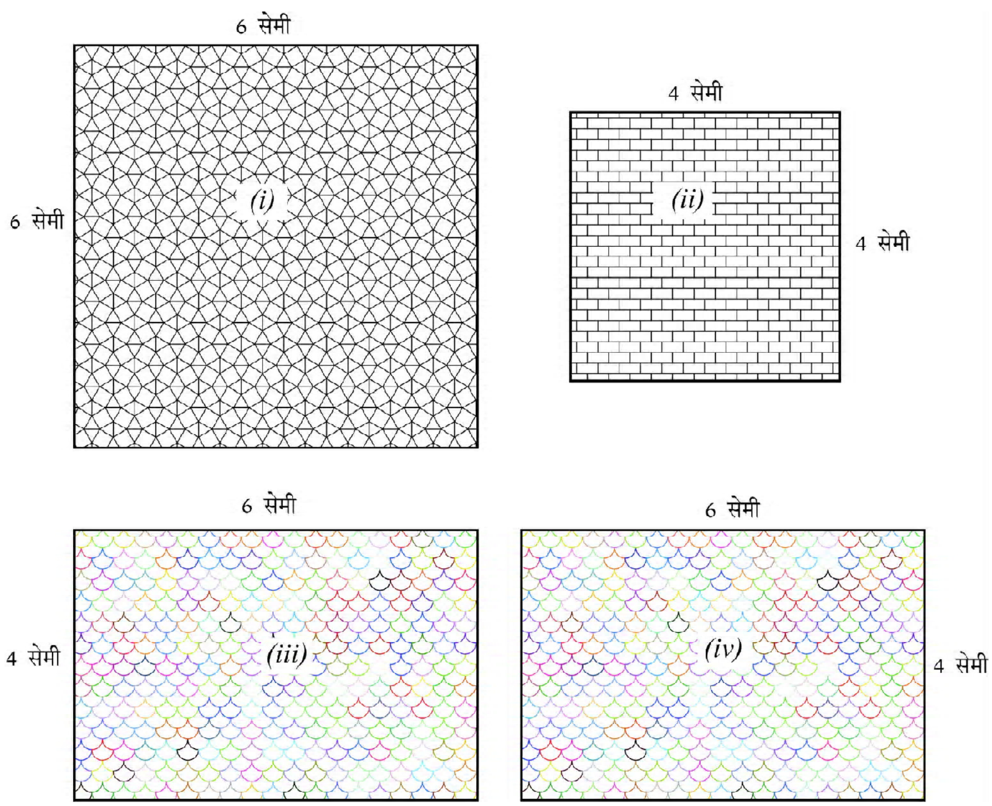
क्रिया विधि

दफ्ती से एक $a = 6$ सेमी लम्बाई के वर्ग की आकृति बनाकर काट लीजिए। लाल रंग के ग्लेज पेपर से 6 सेमी लम्बाई का वर्ग बनाकर इस वर्ग पर चिपका लीजिए।

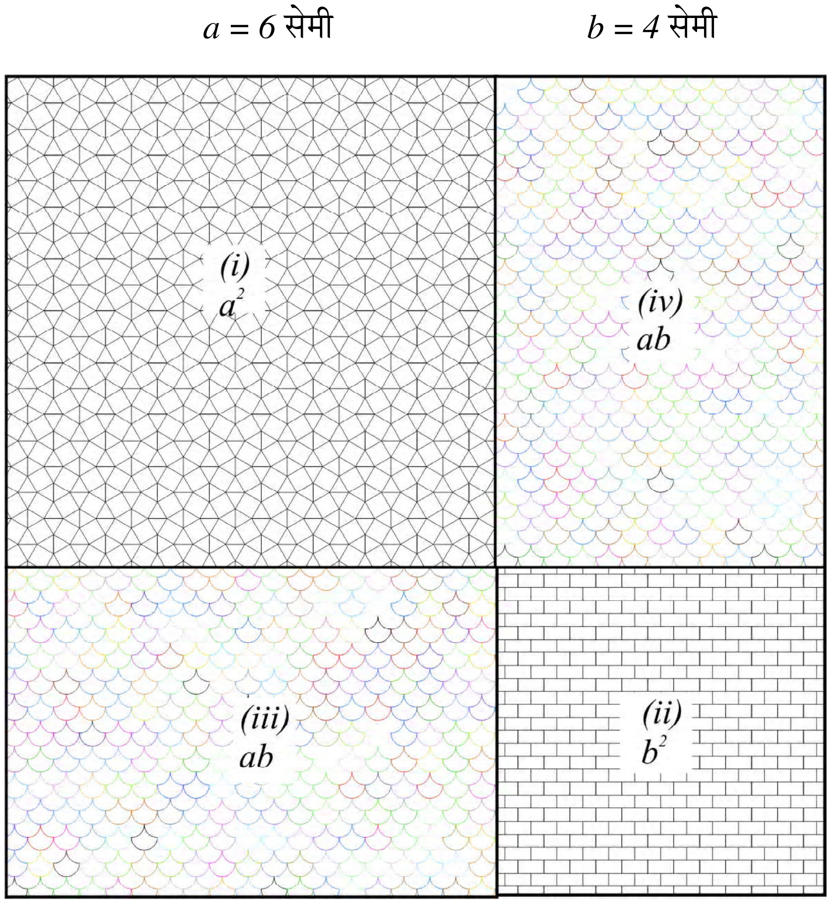
इसी प्रकार दफ्ती से $b = 4$ सेमी लम्बाई की वर्ग आकृति बनाइए। अब इस वर्ग पर हरे रंग ग्लेज पेपर से 4 सेमी लम्बाई का वर्ग बनाकर चिपका लीजिए।

दफ्ती से दो आयताकार आकृतियाँ जिनकी लम्बाई $a = 6$ सेमी और चौड़ाई $b = 4$ सेमी हो बनाकर काट लीजिए इन पर पीले रंग के ग्लेज पेपर से इसी नाप की आयताकार आकृतियाँ बनाकर चिपका लीजिए।

दफ्ती से तैयार की गई आकृतियाँ



बनी हुई चारों आकृतियों को थर्मोकोल के ऊपर निम्न प्रकार से व्यवस्थित कीजिए कि चारों भुजाओं की लम्बाई $(a + b) = 6 + 4 = 10$ सेमी हो जाय।



थर्मोकोल पर व्यवस्थित आकृति एक वर्ग की है जिसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई

$(a + b) = 6 + 4 = 10$ सेमी है।

इस प्रकार बने वर्ग का क्षेत्रफल $= (a + b)^2 = (6 + 4)^2$

$= (10)^2$ वर्ग सेमी

आकृति (i) का क्षेत्रफल $= (a)^2 = (6)^2$

$= 36$ वर्ग सेमी

आकृति (ii) का क्षेत्रफल $= (b)^2 = (4)^2$

$= 16$ वर्ग सेमी

आकृति (iii) और (iv) का क्षेत्रफल $= 2 \times a \times b = 2 \times 6 \times 4$

$= 48$ वर्ग सेमी

अत: नये वर्ग आकृति का क्षेत्रफल

$$= \text{चारों आकृतियों के क्षेत्रफलों का योगफल}$$

$$(6 + 4)^2 = (6)^2 + (4)^2 + (6 \times 4) + (6 \times 4)$$

$$= (6)^2 + (4)^2 + 2(6 \times 4)$$

यहाँ $a = 6$ तथा $b = 4$

परिणाम

उपरोक्त क्रियाकलाप से इस सर्वसमिका का सत्यापन किया गया है।

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \times ab$$

$$= a^2 + b^2 + 2\,ab$$

नोट : इसी प्रकार a तथा b की विभिन्न नापों से इस सर्वसमिका का सत्यापन किया जा सकता है।

प्रोजेक्ट 3 (ख) सर्वसमिका $(a^2 - b^2)$ का क्रियात्मक निरूपण

आवश्यक सामग्री

तीन रंग (लाल, नीला, पीला) के ग्लेज पेपर दफ्ती या कार्ड बोर्ड, कैंची, पेन्सिल, पटरी, गोंद आदि।

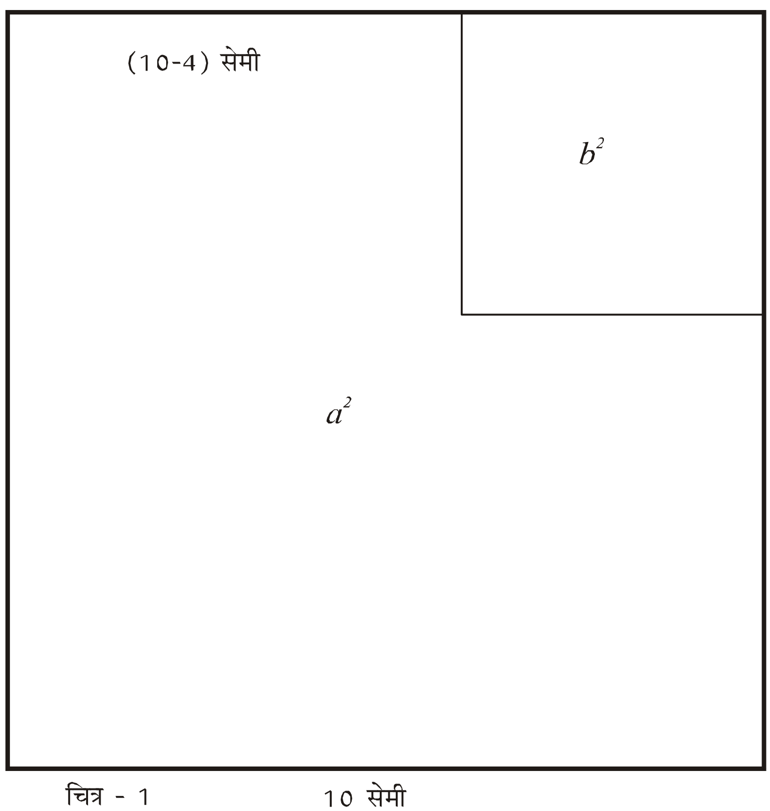
क्रिया विधि

दफ्ती पर एक वर्ग की आकृति बनाइए जिसकी भुजा की लम्बाई $a = 10$ सेमी हो।

प्राप्त वर्ग आकृति का क्षेत्रफल $= (10)^2$

$= 100$ वर्ग सेमी

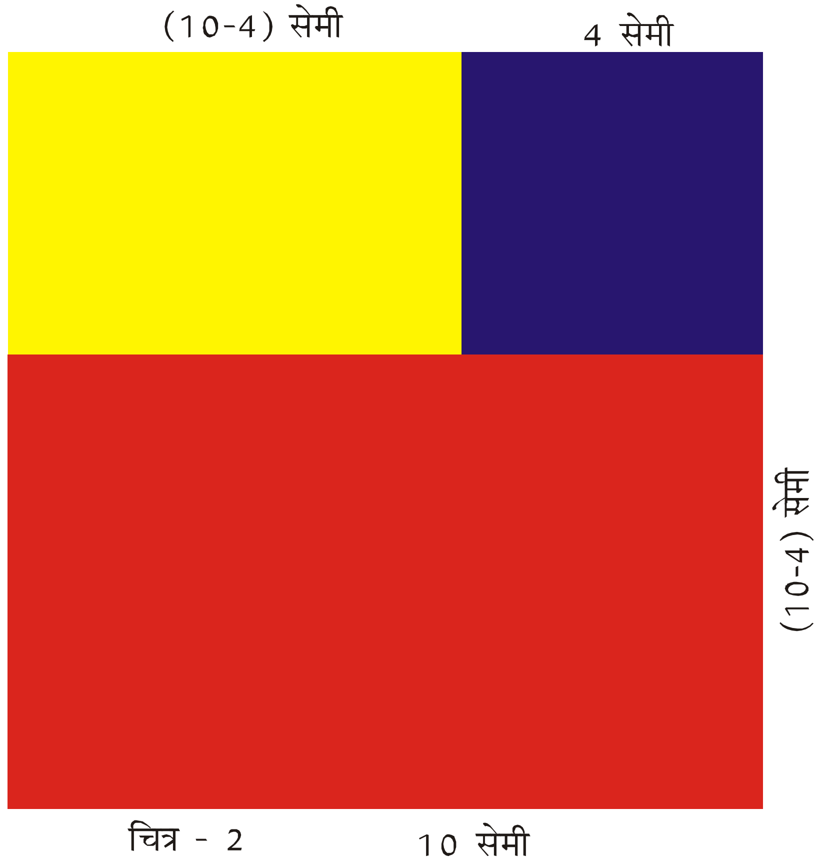
इस वर्ग से नीचे दिये चित्र के अनुसार $b = 4$ सेमी भुजा का एक वर्ग काट लीजिए।



चित्र - 1

10 सेमी भुजा के वर्ग से $b = 4$ सेमी का वर्ग काटने पर

शेष भाग का क्षेत्रफल $= (10^2 - 4^2)$ वर्ग सेमी

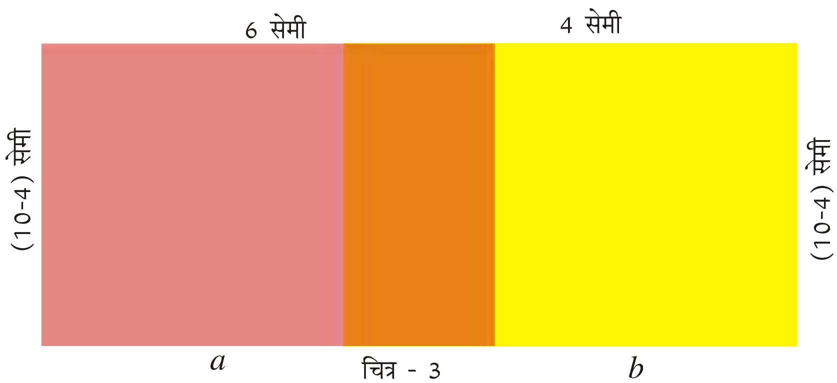


चित्र - 2

अब शेष भाग से आयताकार भाग जिसकी लम्बाई 10 सेमी और चौड़ाई 6 सेमी है, काटकर अलग कीजिए।

आकर्षक बनाने के लिए कटे हुवे आयताकार भाग पर लाल रंग का ग्लेज पेपर चिपका लीजिए, और कटे हुए दूसरे भाग पर पीले रंग का ग्लेज पेपर चिपका लीजिए।

लाल और पीले रंग की इन आकृतियों को निम्न चित्र के अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



चित्र - 3

प्राप्त आकृति आयताकार हैं, जिसकी लम्बाई = (10 + 4) सेमी

चौड़ाई = (10 - 4) सेमी

इस आयताकार आकृति का क्षेत्रफल = (10 + 4)(10 - 4) वर्ग सेमी

अतः $(10^2 - 4^2) = (10 + 4)(10 - 4)$

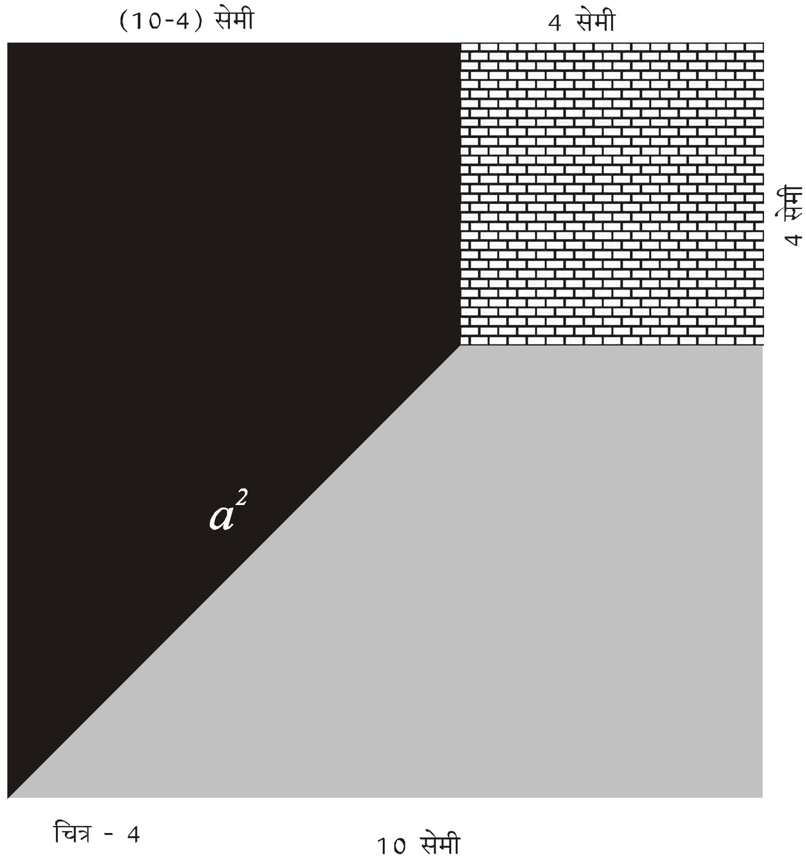
$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

जहाँ $a = 10, \ b = 4$

परिणाम

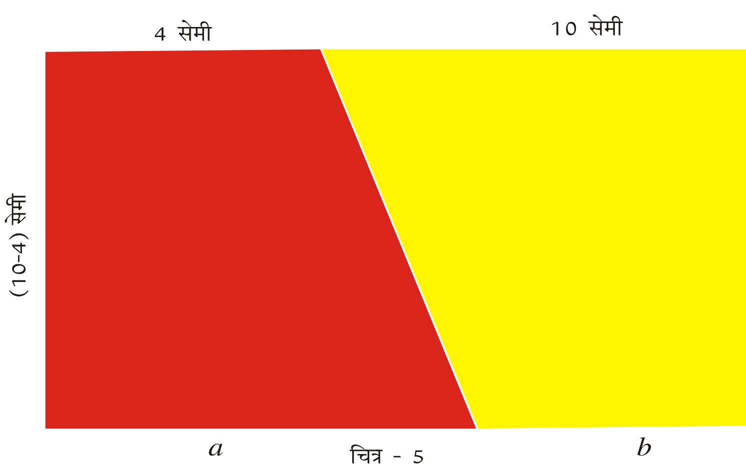
उपरोक्त से $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

वैकल्पिक विधि



चित्र - 4

वर्ग a^2 की आकृति में से वर्ग b^2 की आकृति को काट कर अलग करने के बाद शेष बची हुई आकृति में कटे हुए कोने के विकर्ण के अनुदिश काट लीजिए। इस प्रकार कटी हुई आकृतियों को चित्र 5 के अनुसार व्यवस्थित कीजिए-



चित्र - 5

10 सेमी भुजा के वर्ग से $b = 4$ सेमी का वर्ग काटने पर शेष भाग का क्षेत्रफल = $(10^2 - 4^2)$ वर्ग सेमी

चित्रानुसार व्यवस्थित आयताकार आकृति की लमई (10 + 4) सेमी और चौड़ाई (10 - 4) सेमी है।

अतः प्राप्त आयताकार आकृति का क्षेत्रफल

$$= (10 + 4)(10 - 4)$$

$$= (10^2 - 4^2) = (10 + 4)(10 - 4)$$

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

जहाँ $b = 10$, $b = 4$

परिणाम

उपरोक्त से

$$\boldsymbol{(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)}$$

इकाई-5 बीजगणित

अध्याय-14 गुणनखण्ड विधि से बहुपदों के लघुतम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक

उद्देश्य :

- बहुपदों के गुणखण्ड करने का बोध कराना।
- बहुपदों के महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना।
- बहुपदों के लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करना।
- दो बहुपदों के LCM, HCF में तीन ज्ञात होने पर चौथे अज्ञात को ज्ञात करना।

शिक्षण बिन्दु :

- बहुपदों के गुणनखण्ड।
- बहुपदों के महत्तम समापवर्तक।
- बहुपदों के लघुतम समापवर्त्य।
- दो बहुपदों के LCM तथा HCF में सम्बन्ध।

बहुपदों के गुणनखण्ड :

यदि कोई बहुपद $f(x)$ किन्हीं दो या दो से अधिक बहुपदों $g(x)$ ओर $h(x)$ आदि का गुणनफल हो, तो $g(x)$ और $h(x)$ प्रत्येक $f(x)$ का एक गुणनखण्ड कहलाता है।

जैसे- $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$ को

इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$f(x) = 2(x-2)(x-3)$$

यहाँ 2, $(x-2)$ तथा $(x-3)$ तीनों $f(x)$ के गुणनखण्ड हैं। हम $f(x)$ को इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$$f(x) = -2(3-x)(x-2)$$

यहाँ 2 और $(3 - x)$ भी $f(x)$ के गुणखण्ड हैं। स्पष्ट है कि यदि $g(x)$ किसी बहुलक $f(x)$ का गुणनखण्ड हो, तो $-g(x)$ भी $f(x)$ का गुणनखण्ड होता है।

इसी प्रकार गुणनखण्डों को भाजक भी कहा जाता है। किन्तु व्यंजको के भाजक की जगह गुणनखण्ड कहना ज्यादा सटीक है। चर x के दो से अधिक घातों वाले व्यंजकों के गुणनखण्ड में शेषफल प्रमेय का प्रयोग भी करते हैं।

बहुपदों

$f(x) = 2(x - 2)^2 (x - 4)(2x - 1)$

और $g(x) = 8(x - 2)^3 (2x - 1)(3x + 1)$

में 2, $(x - 2)$, $(x - 2)^2$, $(2x - 1)$ गुणनखण्ड $f(x)$ और $g(x)$ दोनों के सार्वगुणनखण्ड हैं।

पुनः $r(x) = 2(x - 2)^2 (2x - 1)$ भी $f(x)$ और $g(x)$ का सार्व गुणनखण्ड है।

$f(x)$ और $g(x)$ को इस प्रकार भी लिख सकते हें-

$f(x) = [2(x - 2)^2 (2x - 1)](x - 4)$

$= r(x)(x - 4)$

$g(x) = [2(x - 2)^2(2x - 1)][4(x - 2)(3x + 1)]$

$= r(x)[4(x - 2)(3x + 5)]$

स्पष्ट है कि $f(x)$ और $g(x)$ में $r(x)$ के अतिरिक्त और कोई सार्वगुणनखण्ड नहीं है। इसी कारण $r(x)$ को $f(x)$ और $g(x)$ का सबसे बड़ा सार्वगुणनखण्ड अथवा महत्तम समापवर्तक या HCF कहते हैं।

HCF ज्ञात करने की विधि :

पहले हम संख्याओं के HCF ज्ञात करने की विधि देखेंगे।

जैसे- 36 ओर 54 का HCF ज्ञात करने में निम्न चरणों का पालन सुविधाजनक है।

चरण 1 :

प्रत्येक संख्या को अभाज्य संख्याओं के घातांकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

$36=2^2\times3^2$

$54=2\times3^3$

चरण 2 :

यदि कोई सार्व अभाज्य गुणनखण्ड न हो, तो HCF, 1 होगा। यदि कोई सार्व अभाज्य गुणनखण्ड हों तो दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों में आने वाली प्रत्येक अभाज्य संख्या का न्यूनतम घातांक ज्ञात कीजिए।

उपर्युक्त उदाहरण में 2 एवम् 3 अभाज्य सार्वगुणनखण्ड हैं जिनकी न्यूनतम घातें क्रमशः 2^1 एवम 3^2 हैं।

अतः अभाज्य सार्वगुणनखण्ड क्रमशः 2^1एवम् 3^2 हैं।

चरण 3 :

अभाज्य सार्वगुणनखण्डों को आपस में गुणा करके HCF प्राप्त करते हैं।

उपर्युक्त उदाहरण में 36 ओर 54 का HCF

$=2^1 \times 3^2$

$=18$

संख्याओं की ही तरह बहुपदों में, अभाज्य गुणखण्ड के स्थान पर अखंडनीय गुणनखण्ड का प्रयोग करते हैं। अखंडनीय गुणनखण्ड को सरलतम् गुणनखण्ड भी कहते हैं। जैसे $2x + 8$ अखंडनीय नहीं है क्योंकि $2x + 8 = 2 (x + 4)$ जबकि $x^2 + 1$ अखंडनीय है क्यों कि इसके आगे सरलतम् गुणनखण्ड नहीं किये जा सकते।

उदाहरण 1 : बहुपदों $30 (x^2 - 3x + 2)$ और$50 (x^2 - 2x + 1)$ का HCF ज्ञात कीजिए।

$$f(x) = 2 \times 3 \times 5 \times (x - 1) \times (x -2)$$

$$g(x) = 2 \times 5^2 \times (x - 1)^2$$

अतः $f(x)$ और $g(x)$ का $HCF = 2^1 \times 5^1 \times (x-1)^1$

$= 10 \ (x - 1)$

उदाहरण 2 : बहुपदों $f (x) =10 (x + 1) (x - 3)^3$

$$g(x) = 15 (x - 2) (x - 3)^2$$

और $h(x) = 25 (x + 5) (x - 3)^3$ का HCF ज्ञात कीजिए।

यहाँ तीनों बहुपदों में सार्व अखंडनीय गुणनखण्ड और इनके न्यूनतम घातांक ज्ञात करते हैं :

$$f (x) = 2 \times 5 \times (x + 1) \times (x - 3)^3$$

$$g(x) = 3 \times 5 \times (x - 2) \times (x - 3)^2$$

$$h(x) = 5^2 \times (x + 5) \times (x - 3)^3$$

अतः $HCF = 5^1 \times (x - 3)^2$

$= 5 \times (x - 3)^2$

बहुपदों का लघुतम समापवर्त्य :

संख्याओं की भाँति बहुपदों के संदर्भ में भी यदि

$f(x)= h(x) \ . \ g(x)$

तो $f(x)$ को $g(x)$ और $h(x)$ का गुणज या अपवर्त्य कहते हैं तथा $g(x)$ और $h(x)$ को $f(x)$ का गुणनखण्ड कहते हैं। संख्याओं के LCM ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित उदाहरण पर ध्यान दें-

8 के गुणज हैंः 8, 16, 24, 32, 40, ...

12 के गुणज हैं : 12, 24, 36, 48, 60, ...

8 और 12 के इन गुणजों में संख्याएँ 24, 48 सार्व हैं। ये सभी संख्याएँ सार्व गुणज हैं या समापवर्त्य हैं और उनमें सबसे छोटा या लघुतम गुणज 24 है। अतः 8 और 12 का LCM 24 है।

LCM ज्ञात करने की दूसरी विधि अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा भी है। जो इस प्रकार है-

$$8 = 2^3$$

$$12 = 2^2 \times 3^1$$

अब इन अभाज्य गुणनखण्डों को उनके अधिकतम घातांक को लेकर गुणा करके LCM ज्ञात करते हैं।

उपयुर्क्त उदाहरण में 8 और 12 का LCM $2^3 \times 3^1 = 24$ होगा।

इसी प्रकार दो या दो से अधिक बहुपदों का LCM अभाज्य संख्याओं के स्थान पर अखंडनीय गुणनखण्ड लेकर ज्ञात करते हैं।

उदाहरण : बहुपदों $(x - 2)\ (x^2 - 3x + 2)$ और $(x^2 - 5x + 6)$ का LCM ज्ञात कीजिए।

$$p\ (x) = (x - 2)\ (x^2 - 3x + 2)$$

$$p\ (x) = (x - 1)\ (x - 2)^2$$

तथा $q\ (x) = x^2 - 5x + 6$

$$q\ (x) = (x - 2)\ (x - 3)$$

स्पष्टतः, $(x - 1)$ और $(x - 2)^2$, $p\ (x)$ के प्रत्येक गुणज के गुणनखण्ड होंगे। इसी प्रकार $(x - 2)$ और $(x - 3)$, $q(x)$ के प्रत्येक गुणज के गुणनखण्ड होंगे। इस प्रकार $(x - 1)$,$(x - 2)$,$(x - 2)^2$ और $(x - 3)$ अनिवार्यतः $p(x)$ और $q(x)$ के प्रत्येक सार्वगुणज या समापवर्त्य के गुणनखण्ड होंगे। इन चार गुणनखण्डों में से $(x - 2)$ को छोड़ा जा सकता है, क्यों कि यदि $(x - 2)^2$ किसी बहुपद का गुणनखण्ड हुआ, तो $(x - 2)$ इसका गुणनखण्ड अवश्य ही होगा। अतः

$$r\ (x) = (x - 1)\ (x - 2)^2\ (x - 3)$$

आवश्यक रूप से $r\ (x)$, $p(x)$ और $q(x)$ के प्रत्येक सार्वगुणज का गुणनखण्ड होगा।

अतः $p(x)$ और $q(x)$ का LCM, $r\ (x)$ है।

इस उदाहरण से स्पष्ट है कि दो या दो से अधिक बहुपदों का LCM ज्ञात करने के लिए, प्रत्येक बहुपद को अखंडनीय गुणनखण्डों की अधिकतम घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : बहुपदों

$$f\ (x) = 4(x - 1)^2\ (x^2 + 6x + 8)$$

और $g(x) = 10\ (x - 1)\ (x + 2)\ (x^2 + 7x + 10)$ का LCM ज्ञात कीजिए।

बहुपदों को अखंडनीय गुणनखण्डों की घातों के गुणनफल के रूप में लिखने पर

$f(x) = 2^2 \times (x-1)^2 \times (x+2) \times (x+4)$

$g(x) = 2 \times 5 \times (x-1) \times (x+2) \times (x+5) \times (x+2)$

$= 2 \times 5 \times (x-1) \times (x+2)^2 \times (x+5)$

अतः $f(x)$ और $g(x)$ का LCM

$= 2^2 \times 5^1 \times (x-1)^2 \times (x+2)^2 \times (x+4)^1 \times (x+5)^1$

$= 20\,(x-1)^2(x+2)^2\,(x+4)\,(x+5)$

.यदि m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हों, तो

(m और n का LCM) × (m और n का HCF) = mn

इसी प्रकार $f(x)$ और $g(x)$ बहुपदों के लिए

($f(x)$ और $g(x)$ का LCM) × ($f(x)$ और $g(x)$ का HCF) = $f(x)\,g(x)$ या $-f(x)\,g(x)$

यदि HCF, LCM दिये हुए हों और $f(x)$ तथा $g(x)$ में से एक माना कि $f(x)$ ज्ञात हो तो $g(x)$ अद्वितीय रूप से ज्ञात नहीं किया जा सकता। दो बहुपद $g(x)$ और $-g(x)$ ऐसे होंगे जिनके $f(x)$ के साथ LCM और HCF वही होंगे जो दिए गए हैं।

यदि बहुपदों $f(x)$ और $g(x)$ के HCF को $h(x)$ तथा LCM को $l(x)$ से व्यक्त करें तब हमें प्राप्त होता है

$h(x) \times l(x) = \pm f(x) \times g(x)$

उदाहरण 4 : दो बहुपदों के HCF और LCM क्रमशः $(4x+5)(3x-7)^2$ और $(4x+5)^3(3x-7)^3$ हैं। यदि दोनों में से एक बहुपद $(4x+5)^3(3x-7)^2$ हो, तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

यहाँ $h(x) = (4x+5)(3x-7)^2$

$l(x) = (4x+5)^3(3x-7)^3$

$f(x) = (4x+5)^3(3x-7)^2$

सूत्र $h(x) \times l(x) = \pm f(x)\,g(x)$ में रखने पर

$\{(4x+5)(3x-7)^2\}\{(4x+5)^3(3x-7)^3\} = \pm(4x+5)^3(3x-7)^2 \times g(x)$

अथवा $(4x+5)^4(3x-7)^5 = \pm(4x+5)^3(3x-7)^2 \times g(x)$

अथवा $\pm g(x) = (4x+5)(3x-7)^3$

अर्थात् $g(x) = (4x+5)(3x-7)^3$ या $-(4x+5)(3x-7)^3$

उदाहरण 5 : बहुपदों $(x+3)(-x^2+10x-25)$ और $(x-5)(x+3)^3$ का LCM ज्ञात कीजिए और फिर इसकी सहायता से HCF ज्ञात कीजिए।

यहाँ $f(x) = (x + 3)(-x^2 + 10x - 25)$

$= -(x + 3)(x - 5)^2$

और $g(x) = (x - 5)(x + 3)^3$ है।

अधिकतम घात वाले पद का गुणांक धनात्मक लेने पर

$f(x)$ और $g(x)$ का $LCM = (x + 3)^3 (x - 5)^2$

पुनः सूत्र $h(x) \times l(x) = \pm f(x)\, g(x)$ का प्रयोग करने पर

$$h(x) \times (x + 3)^3 (x - 5)^2 = \{ -(x + 3)(x - 5)^2 \times (x - 5)(x + 3)^3$$

$$= \pm (x + 3)^4 (x - 5)^3$$

अतः $h(x) = \pm (x + 3)(x - 5)$

अधिकतम घात वाले पद का गुणांक धनात्मक लेने पर

$$h(x) = (x + 3)(x - 5)$$

मूल्यांकन :

विद्यार्थियों से निम्नलिखित प्रश्शनों को हल करायें।

1. निम्नलिखित बहुपदों का HCF ज्ञात कीजिए।

   $(x^2 - 1), (x^4 - 1)$ और $(x - 1)^2$

2. बहुपदों $12(x^4 - x^3)$ और $8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ का LCM ज्ञात कीजिए।

3. a और b के मान ज्ञात कीजिए, यदि बहुपदों

   $f(x) = (x + 3)(2x^2 - 3x + a)$

   और $g(x) = (x - 2)(3x^2 + 10x - b)$

   का HCF, $(x + 3)(x - 2)$ हो।

4. k के किस मान (किन मानों) के लिए $x^2 + x - (2k + 2z)$ और

   $2x^2 + kx - 12$ का HCF, $x + 4$ होगा?

5. दो बहुपदों $p(x) = (x - 3)(x^2 + x - 2)$ और

   $q(x) = x^2 - 5x + 6$ का HCF, $x - 3$ है।

   तो $p(x)$ और $q(x)$ का LCM ज्ञात कीजिए।

अध्याय-15 परिमेय व्यंजक

उद्‌देश्य :-

- परिमेय व्यंजको की पहचान का बोध कराना।
- परिमेय व्यंजक, परिमेय संख्या के समान व्यवहार करते हैं।
- परिमेय व्यंजक को निम्नतम् पदो मे व्यक्त करना।
- परिमेय व्यंजकों के योग संकिया का बोध कराना।
- परिमेय व्यंजक के योज्य प्रतिलोम का बोध कराना।
- परिमेय व्यंजक के गुणन एवम् उनके विभाजन की संकियाओं का बोध कराना।

शिक्षण बिन्दु :-

- बहुपद का ज्ञान।
- पूर्णांकों एवम् बहुपदों के गुणों की तुलना।
- परिमेय संख्या एवम् परिमेय व्यंजकों की समानता।
- बहुपद को परिमेय व्यंजक के रूप में प्रकट करना।
- परिमेय व्यंजक को निम्नतम् पदो में व्यक्त करना।
- परिमेय व्यंजकों को जोड़ना, घटाना, गुणा एवम् भाग करना।
- परिमेय व्यंजक का योज्य प्रतिलोम ज्ञात करना।
- परिमेय व्यंजक का व्युत्क्रम या गुणनात्मक प्रतिलोम।

बहुपद *(Polynomial)*-

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} .x + a_n$$

जैसे बीजीय व्यंजकों को एक चर x में बहुपद कहते हैं, जहाँ कि

(i) केवल एक चर x आता हो और $n \geq 0$ एक पूर्णांक हो और

(ii) $a_0, a_1, ...a_n$ वास्तविक संख्याएँ हों।

(iii) $a_0 \neq 0$, उपयुर्क्त बहुपद घात का बहुपद कहलाता है।

.निम्नलिखित तालिका से पूर्णांकों एवम् बहुपदों के गुणधर्मों की समानता स्पष्ट है।

पूर्णांक	**बहुपद**
1. दो पूर्णांकों का योग (अंतर) एक पूर्णांक होता है।	दो बहुपदों का योग (अंतर) एक बहुपद होता है।
2. पूणांक शून्य (0) ऐसा है कि किसी भी पूर्णांक a के लिए $a + 0 = a$	शून्य बहुपद (जिसे हम 0 से प्रकट करते हैं) ऐसा होता है कि किसी बहुपद $p(x)$ के लिए $p(x) + 0 = p(x)$
3. किसी पूर्णांक (a) के लिए एक ऐसा पूर्णांक $-a$ होता है कि $a + (-a) = 0$	किसी बहुपद $p(x)$ के लिए एक ऐसा बहुपद $-p(x)$ होता है कि $p(x) + [-p(x)] = 0$
4. किन्हीं भी दो पूर्णांकों का गुणनफल, एक पूर्णांक होता है।	किन्हीं भी दो बहुपदों का गुणनफल एक बहुपद होता है।
5. पूर्णांक 1 ऐसा है कि किसी पूर्णांक a के लिए $a \cdot 1 = a$	बहुपद 1 ऐसा बहुपद है कि किसी बहुपद $p(x)$ के लिए $p(x) \cdot 1 = p(x)$

उपर्युक्त गुणधर्मों के आधार पर हम कह सकते हैं कि बहुपद, पूर्णांकों की तरह व्यवहार करते हैं।

- $\frac{m}{n}$ के रूप की संख्याएँ, जहाँ m एवं n पूर्णांक हैं और $n \neq 0$ परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। यह आवश्यक नहीं है कि $\frac{m}{n}$ भी पूर्णांक हो। परिमेय संख्या के मानक रूप में n को ऋणात्मक नहीं लेते। यदि n ऋणात्मक हो तो उसे अंश में चिह्न परिवर्तित करके धनात्मक बना लिया जाता है।

- $\frac{p(x)}{q(x)}$ के रूप का व्यंजक जहाँ, $p(x), q(x)$ बहुपद है तथा $q(x)$ शून्येतर बहुपद है, परिमेय व्यंजक कहलाता है। x के उस मान के लिए जिसमें $q(x) \neq 0$, $p(x)$ परिमेय व्यंजक परिभाषित होता है। स्पष्टतया परिमेय संख्याओं की भाँति यह आवश्यक नहीं है कि $\frac{p(x)}{q(x)}$ एक बहुपद हो।

- प्रत्येक बहुपद $p(x)$ एक परिमेय व्यंजक है - क्योंकि हम $p(x)$ को $\frac{p(x)}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं।

- निम्नतम पदों में परिमेय व्यंजक -

एक परिमेय संख्या $\frac{m}{n}$ को अपने लघुतम या निम्नतम पदों में होना तब कहते हैं जबकि

m तथा n के निरपेक्ष मानों का महत्तम समापवर्तक *(HCF) 1* हो। यदि $\frac{m}{n}$ अपने निम्नपदों में न हो तो हम अंश और हर में से HCF का निरसन करके या भाग देकर उसे निम्नतम पदों में प्राप्त करते हैं।

इसी प्रकार यदि $p(x)$ तथा $q(x)$ बहुपदों का HCF *1* हो तो हम कह सकते हैं कि परिमेय व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ अपने निम्नतम पदों में है।

यदि $\frac{p(x)}{q(x)}$ अपने निम्नतम पदों में नहीं हो, तो अंश और हर दोनों में इनके HCF से भाग देकर उसे निम्नतम पदों में प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 1 - परिमेय व्यंजक $\frac{(x+2)(x-4)}{(x+1)}$ अपने निम्नतम पदों में है क्योंकि अंश $(x+2)(x-4)$ तथा हर $(x+1)$ का HCF, 1है।

उदाहरण 2 - निम्नलिखित परिमेय व्यंजक को उसके निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए :

$$\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$$

$$p\ (x) = 6x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)\ (3x - 1)$$

$$q\ (x) = 9x^2 + 12x - 5 = (3x + 5)\ (3x - 1)$$

$p\ (x)$ तथा $q\ (x)$ का $HCF = 3x - 1$

अतः $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(2x-1)\,(3x-1)}{(3x+5)\,(3x-1)} = \frac{2x-1}{3x+5}$$

(यहाँ अंश और हर दोनों में $HCF = 3x - 1$ से भाग देने पर)

अतः $\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ अपने निम्नतम पदों में $\frac{2x-1}{3x+5}$ रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 3. जब दोनों परिमेय व्यंजकों के हर समान हैं।

$$\frac{x^2+1}{x-2}+\frac{x^2-1}{x-2} = \frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x-2} = \frac{2x^2}{x-2}$$

उदाहरण 4- जब दोनों परिमेय व्यंजकों के हर समान नहीं हैं -

$$\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

(यहाँ *(x - 1)²* तथा *(x + 1)* का *LCM (x - 1)² (x + 1)* है।)

$$= \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$$

परिमेय व्यंजक का योज्य प्रतिलोम :

यदि परिमेय व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ को परिमेय व्यंजक $\frac{-p(x)}{q(x)}$ में जोड़ें तो हमें प्राप्त होता है

$$\frac{p(x)}{q(x)}+\frac{-p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)-p(x)}{q(x)}=\frac{0}{q(x)} = 0$$

यहाँ, $\frac{-p(x)}{q(x)}$, व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ का योज्य प्रतिलोम कहलाता है।

उदाहरण 5- $-\left(\frac{x^3-2x}{x^2+3}\right)$ व्यंजक $\frac{x^3-2x}{x^2+3}$ का योज्य प्रतिलोम है।

दो परिमेय व्यंजकों का योग एवं अन्तर सदैव एक परिमेय व्यंजक होता है। उपर्युक्त उदाहरणों 1 तथा 2 में योग और अन्तर के परिणाम परिमेय व्यंजक हैं।

उदाहरण 6 - $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$ को सरल कीजिए

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$$

यहाँ *(x - 1), x* तथा *(x + 1) (x - 1)* के *LCM x (x - 1) (x + 1)* है।

$$= \frac{3x(x+1)-2(x-1)(x+1)+(x+3)x}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{3x^2+3x-2x^2+2+x^2+3x}{(x-1)x(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+6x+2}{x^3-x}$$

जो कि एक परिमेय व्यंजक है।

परिमेय व्यंजकों का गुणन :

दो परिमेय संख्याओं के गुणनफल की ही तरह से परिमेय व्यंजकों के गुणनफल को प्राप्त करते हैं।

दो परिमेय व्यंजकों $\frac{p(x)}{q(x)}$ एवं $\frac{r(x)}{s(x)}$ के गुणनफल को $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x).r(x)}{q(x).s(x)}$ के रूप में व्यक्त करते हैं।

उदाहरण 7- परिमेय व्यंजकों $\frac{x^2-7x+10}{(x-4)^2}$ एवं $\frac{x^2-7x+12}{x-5}$ का गुणन कीजिए एवं गुणनफल को उनके निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

$$\frac{x^2-7x+10}{(x-4)^2} \times \frac{x^2-7x+12}{(x-5)} = \frac{(x^2-7x+10)\times(x^2-7x+12)}{(x-4)^2\times(x-5)}$$

$$= \frac{(x-2)\,(x-5)\,(x-3)\,(x-4)}{(x-4)\,(x-4)\,(x-5)}$$

अंश और हर का *HCF, (x - 5) (x - 4)* है। *HCF* से अंश और हर में भाग देने पर

$$\frac{x^2-7x+10}{(x-4)^2} \times \frac{x^2-7x+12}{(x-5)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-4)}$$

$$= \frac{x^2-5x+6}{x-4}$$ *(जो कि निम्नतम पदों में है)*

परिमेय व्यंजकों का व्युत्क्रम :

प्रत्येक शून्येतर परिमेय व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ $[p(x) \neq 0]$ के संगत $\frac{q(x)}{p(x)}$ एक ऐसा परिमेय व्यंजक होता है कि $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{p(x)\,q(x)}{q(x)\,p(x)} = 1$ हो तो $\frac{q(x)}{p(x)}$ को $\frac{p(x)}{q(x)}$ का व्युत्क्रम या गुणनात्मक प्रतिलोम कहते हैं।

परिमेय व्यंजकों का विभाजन :

एक शून्येतर परिमेय संख्या से भाग देने का अर्थ होता है उसके व्युत्क्रम से गुणा करना। उसी प्रकार शून्येतर परिमेय व्यंजक से भाग देने का अर्थ होता है, उसके व्युत्क्रम से गुणा करना।

उदाहरण 8 - $\frac{-2x}{x^2-1}$ का व्युत्क्रम $\frac{1-x^2}{2x}$ है।

उदाहरण 9 $\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ को निम्नतम पदों के एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \frac{x^2-1}{x^2-25} \times \frac{x^2+4x-5}{x^2-4x-5}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-5)(x+5)} \times \frac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$$

मूल्यांकन :

विद्यार्थियों को निम्नलिखित प्रश्नों को हल करायें।

1. निम्नलिखित परिमेय व्यंजक को निम्नतम पदों में लिखिए।

$$\frac{(x^2+3x+2)(x^2+5x+6)}{x^2(x^2+4x+3)}$$

2. $\frac{x^3-1}{x^2+2}$ में कौन-सा परिमेय व्यंजक जोड़ा जाए कि $\frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ प्राप्त हो ?

3. यदि $m = \frac{x+1}{x-1}$ एवं $n = \frac{x-1}{x+1}$ है, तब $m^2 + n^2 - mn$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $a = x + \frac{1}{x}$ हो, तब $a + \frac{1}{a}$ को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

5. सरल कीजिए $\left(\frac{2}{x^2-x-6} + \frac{3}{x^2+x-2}\right) \div \frac{4}{x^2-4x-3}$

अध्याय 16 - द्विघात समीकरण

उद्देश्य

- द्विघात समीकरण की पहचान करना।
- द्विघात समीकरण को विभिन्न विधियों द्वारा हल करना।
- वार्तिक प्रश्नों में द्विघात समीकरण बनाना एवं हल करना।

शिक्षण बिन्दु

- द्विघात बहुपद
- द्विघात समीकरण तथा इसके मूल
- द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति
- दिये गये मूलों से द्विघात समीकरण बनाना
- मानक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को गुणनखण्ड एवं सूत्र द्वारा हल करना
- वार्तिक प्रश्नों में द्विघात समीकरण

प्रस्तुतीकरण :

द्विघात बहुपद

शिक्षार्थियों से प्रश्न पूछें कि व्यंजकों $2x, x^3, x^7$ में कितने पद हैं ?

उनके उत्तर के आधार पर स्पष्ट करें कि ऐसे व्यंजक एक पदी कहलाते हैं।

वह व्यंजक जिसमें एक से अधिक पद होते हैं, बहुपद कहलाता है।

जैसे $2x + 5, ax^2 + bx + c, x^3 + 7x + 2$ आदि

शिक्षार्थियों को स्पष्ट करें कि $\frac{x+1}{2x-3}$ एक बीजीय व्यंजक है, यह बहुपद व्यंजक नहीं है।

ऐसे व्यंजक जिसमें दो पद हों, द्विपद व्यंजक कहलाता है। जैसे $2x^3 + 7x, 3x + 2$ आदि।

ऐसे व्यंजक जिसमें तीनपद हो, त्रिपद व्यंजक कहलाता है। जैसे $x^3 + 7x^2 + 2, x^2 + x + 1$ आदि।

ऐसे बहुपद जिसमें चर राशि का उच्चतम घातांक 2 हो, द्विघात बहुपद *(Quadratic or Second degree polynomial)* कहलाता है।

इसका व्यापक रूप $(ax^2 + bx + c)$ है।

द्विघात बहुपद एवं उसके शून्यक को ज्ञात करना -

माना $p(x) = ax^2 + bx + c$

एक द्विघात बहुपद है और k एक अचर राशि है।

x के स्थान पर k रखने पर

$$p(k) = ak^2 + bk + c$$

अतः $x = k$ पर $p(x)$ का मान $ak^2 + bk + c$ होगा।

यदि $x = k$ रखने पर

$p(k) = 0$ हो तो k दिये गये बहुपद का शून्यक कहलाता है।

द्विघात समीकरण

यदि $p(x) = ax^2 + bx + c$

जहाँ पर a, b, c वास्तविक संख्याएँ और x एक चर राशि है।

एक द्विघात बहुपद हो तो

$p(x) = 0$ को द्विघात समीकरण कहते हैं।

उदाहरण

(i) $x^2 + 4x - 3 = 0$

(ii) $\sqrt{3}x^2 - 2 = 0$

(iii) $x^3 + 7x + 2 = 0$ नहीं (क्यों?)

(iv) $x^2 - 3x + 5 = 0$

(v) $\frac{x}{9} = \frac{2}{x}$ हाँ या नहीं (जाँच कीजिए)

शिक्षार्थियों को द्विघात समीकरण पहचानने के लिए कार्य दें।

द्विघात समीकरण को हल करना

1. गुणनखण्ड विधि

माना $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ पर a, b, c वास्तविक संख्याएँ और x चर राशि है।

इस विधि में,

यदि $ax^2 + bx + c = (px + q)\ (rx + s)$

जहाँ पर p, q, r, s वास्तविक संख्याएँ हैं।

तो $(px + q)\ (rx + s) = 0$

$\Rightarrow \quad px + q = 0$

या $\quad rx + s = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-q}{p}$ या $x = -\frac{s}{r}$

जैसे $\quad (3x - 2)\ (2x - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad 3x - 2 = 0$ या $2x - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$ या $x = \frac{3}{2}$ उत्तर

2. पूर्ण वर्ग बनाकर

माना $ax^2 + bx + c = 0$ को $(px + q)^2 = r$ के रूप में पूर्ण वर्ग बनाया गया।

अर्थात $ax^2 + bx + c = (px + q)^2 - r = 0$

$\Rightarrow \quad (px + q)^2 = r, \qquad r \geq 0$

$\therefore\ x = \frac{-q \pm \sqrt{r}}{p}, \qquad r \geq 0$

जैसे $4x^2 - 6x + 1 = 0$ को पूर्ण वर्ग विधि से हल करना।

दिया है : $\quad 4x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad (2x)^2 - 2.2x.\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \quad 2x - \frac{3}{2} = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \quad 2x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$

3. श्रीधराचार्य का सूत्र

माना $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ पर a, b, c वास्तविक संख्याएँ और x एक चर राशि है।

यह एक द्विघात समीकरण है।

इस विधि में,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad ax^2 + bx = -c$$

दोनों पक्षों में $4a$ का गुणा करने पर

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

दोनों पक्षों में b^2 को जोड़ने पर

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow \quad 2ax + b = \pm\sqrt{b^2-4ac} \quad \text{यदि } b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \; x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

यहाँ पर x के निम्नलिखित दो हल प्राप्त होते हैं

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

और $$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ये दो हल समीकरण के मूल कहलाते हैं।

इन्हें ग्रीक अक्षर α और β से निरूपित करते हैं।

अर्थात $$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad b^2 - 4ac \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

और $$\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad b^2 - 4ac \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

अथवा $$\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

समीकरण (1) और समीकरण (2) से हम प्राप्त करते हैं :

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

और $$\alpha\,\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$b^2 - 4ac = D$ को द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तकर *(Discriminant)* कहते हैं।

उपर्युक्त सूत्र से मूलों की प्रकृति निम्नवत् ज्ञात किया जा सकता है :

(i) यदि $D > 0$, मूल वास्तविक तथा असमान होंगे।

(ii) यदि $D = 0$, मूल वास्तविक तथा समान होंगे।

(iii) यदि D एक पूर्ण वर्ग हो तो मूल परिमेय होंगे और पूर्ण वर्ग न होने पर मूल अपरिमेय होंगे।

**(iv)* यदि $D < 0$ तो मूल वास्तविक नहीं होंगे।

नोट : 1. *में मूल काल्पनिक होंगे। जिसके विषय में हम आगामी कक्षा में पढ़ेंगे।

2. यदि समीकरण में गुणांक परिमेय हैं और मूल अपरिमेय हैं तो वे $p + \sqrt{q}$ तथा $p - \sqrt{q}$ के प्रकार के होंगे।

उदाहरण - समीकरण $3x^2 - x - 5 = 0$ का विविक्तकर लिखिए तथा मूलों के लक्षण समीकरण को हल किए बिना ज्ञात्त कीजिए।

हल - दिया गया द्विघात समीकरण

$$3x^2 - x - 5 = 0 \quad \text{--------} \quad (1)$$

समीकरण *(1)* की तुलना मानक द्विघात समीकरण

$$ax^2 + bx + c = 0$$

से करने पर

$$a = 3$$
$$b = -1$$
$$c = -5$$

विविक्तकर *(D)* $= b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4\times3\times(-5)$

$= 1 + 60$

$= 61$

विविक्तकर *(D)* $= 61 > 0$

दिये गये द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक तथा असमान होंगे।

दिये गये मूलों से द्विघात समीकरण बनाना

यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात हों तो उसे निम्नवत प्राप्त किया जा सकता है।

x^2 - (मूलों का योगफल) x + मूलों का गुणनफल = 0

क्योंकि $ax^2 + bx + c = 0$ को $x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे - यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल $2+\sqrt{3}$ और $2-\sqrt{3}$ हों तो द्विघात समीकरण निम्नप्रकार से प्राप्त कर सकते हैं -

$x^2 -$ (मूलों का योगफल) x + मूलों का गुणनफल = 0

$$\Rightarrow \quad x^2 - \left\{\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}x + \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = 0$$ उत्तर

उदाहरण - यदि समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूल α और β हों, तो $\alpha+\beta, \alpha^4+\beta^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - दिया गया समीकरण :

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad .... \quad (1)$$

हम जानते हैं कि यदि $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α और β हों तो

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

समीकरण (1) से

$$\alpha+\beta = -\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}$$

अब $\alpha^4+\beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$= \{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta\}^2 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$= \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$\therefore \alpha^4 + \beta^4 = \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$= \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \right\}^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$= \left\{ \frac{9}{4} - 1 \right\}^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{5}{4} \right)^2 - \frac{1}{2} \qquad = \qquad \frac{25}{16} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25 - 8}{16}$$

$$= \frac{17}{16}$$

$$\alpha^4 + \beta^4 \qquad = \frac{17}{16}$$ उत्तर

द्विघात समीकरणों में समानेय समीकरण

कभी-कभी प्रश्न द्विघातीय नहीं होता है लेकिन रूपान्तरण द्वारा उसे द्विघातीय समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे $y^4 - 3y^2 + 2 = 0$ में $y^2 = x$ रखने पर

$x^2 - 3x + 2 = 0$

प्राप्त होता है जो एक द्विघात समीकरण है।

द्विघात समीकरण के अनुप्रयोग

द्विघात समीकरण का व्यावहारिक अनुप्रयोग है जो निम्नांकित उदाहरण से आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण - 12 को ऐसे दो भागों में बाँटिए जिनका गुणनफल 36 हो।

हल - माना एक भाग x

दूसरा भाग $= 12 - x$

प्रश्नानुसार

$x (12 - x) = 36$

$12 x - x^2 = 36$

$x^2 - 12x + 36 = 0$

$(x - 6)^2 = 0$

$x = 6, 6$

पहला भाग = 6

दूसरा भाग = 6

मूल्यांकन

1. यदि समीकरण $3x^2 + 4x - 6 = 0$ के मूल α और β हों तो $\alpha + \beta, \alpha^2 + \beta^2$ तथा $\alpha^3 + \beta^3$ के मान ज्ञात कीजिए।

2. निम्न समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए :

   (i) $4^x - 3 \times 2^{(x+3)} + 128 = 0$

   (ii) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+9} = 5$

   (iii) $y^4 - 13y^2 + 36 = 0$

3. यदि प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के योगफल की गणना सूत्र $\frac{n(n+1)}{2}$ से की जाती है, तो 1 से प्रारम्भ होकर कितनी प्राकृतिक संख्याओं का योगफल 210 होगा ?

इकाई 6 वाणिज्यिक गणित

अध्याय 17 कराधान

उद्देश्य

- ➲ कर, उसके औचित्य एवं आवश्यकता का ज्ञान कराना।
- ➲ विभिन्न प्रकार के करों से अवगत कराना।
- ➲ आयकर का परिकलन करना सिखाना।
- ➲ आयकर विभाग द्वारा निर्धारित विभिन्न शब्दावलियों का ज्ञान कराना।
- ➲ बिक्रीकर एवं उसकी गणना करना सिखाना।

शिक्षण बिन्दु

- ☞ कर औचित्य एवं आवश्यकता
- ☞ करों का वर्गीकरण
- ☞ आयकर विभाग द्वारा निर्धारित शब्दावलियाँ
- ☞ आयकर का परिकलन
- ☞ बिक्रीकर एवं उसकी गणना

प्रस्तुतीकरण

कर औचित्य एवं आवश्यकता

परिचर्चा के माध्यम से शिक्षार्थियों को बतायें कि सरकार को देश में कानून व्यवस्था बनाये रखने, देश और जनता की सुरक्षा करने, राजकीय कर्मचारियों का वेतन देने एवं देशवासियों के लिए कल्याणकारी कार्य करने के लिए धन की आवश्यकता होती है। अतः सरकार नागरिकों तथा कम्पनियों से धन वसूलती है। इस प्रकार से वसूले गये धन को ही कर कहते हैं।

शिक्षक छात्रों को यह भी स्पष्ट करें कि 'कर' सरकार द्वारा केवल कोष को बढ़ाने के लिए ही नहीं अपितु विभिन्न कल्याणकारी योजनाओं को चलाने के लिए भी लगाये जाते हैं। जैसे -

(1) मुद्रा की स्थिरता बनाये रखना।

(2) शिक्षा स्वास्थ्य एवं सुरक्षा आदि के लिए सुविधा उपलब्ध कराना।

(3) बेरोजगारी दूर करना।

(4) देश की रक्षा करना।

(5) आर्थिक व्यवस्था को नियन्त्रित करना आदि।

अतः हर नागरिक का यह कर्तव्य है कि राष्ट्रहित में वह कर अवश्य अदा करें।

करों का वर्गीकरण

करों को मुख्यतः दो वर्गों में विभाजित किया गया है।

प्रत्यक्ष कर

सरकार द्वारा लगाया गया वह कर जो व्यक्ति को सीधा प्रभावित करता है। जैसे - आयकर, सम्पत्ति कर, उपहार कर आदि।

अप्रत्यक्ष कर

अप्रत्यक्ष कर को व्यक्ति सीधे सरकार को न देकर किसी अन्य माध्यम से देता है। जैसे - बिक्रीकर, उत्पाद शुल्क, सीमा शुल्क आदि।

शिक्षक विभिन्न प्रकार के प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष करों को उदाहरण के माध्यम से शिक्षार्थियों को स्पष्ट करें।

आयकर

यदि किसी व्यक्ति अथवा व्यक्ति समूह की सभी स्रोतों से प्राप्त वार्षिक आय सरकार द्वारा प्रत्येक वित्तीय वर्ष के बजट में निर्धारित सीमा से अधिक होती है, उसे अपनी आय का एक भाग आयकर के रूप में सरकार को देना होता है।

आयकर विभाग द्वारा निर्धारित विभिन्न शब्दावलियाँ

शिक्षक, आयकर से सम्बन्धित विभिन्न शब्दावलियों को परिचर्चा एवं उदाहरणों के माध्यम से शिक्षार्थियों को स्पष्ट करें।

1. करदाता -

जो व्यक्ति आयकर देता है उसे करदाता कहते हैं।

2. वित्तीय वर्ष -

वित्तीय वर्ष 2010-2011 से आशय है 1 अप्रैल 2010 से 31 मार्च 2011 की अवधि। अतः 1 अप्रैल से आगामी वर्ष के 31 मार्च तक की अवधि एक वित्तीय वर्ष होता है।

वित्तीय वर्ष की गणना -

वेतनभोगी व्यक्तियों को सामान्यतः किसी भी माह के वेतन का भुगतान अगले माह में किया जाता है। जैसे अगस्त 2011 माह का वेतन भुगतान अनुवर्ती माह सितम्बर 2011 में होगा। इस प्रकार वित्तीय वर्ष 2010-2011

में माह अप्रैल 2010 का भुगतान मई 2010 में किया गया होगा और अप्रैल 2010 में पूर्ववर्ती माह मार्च 2010 का वेतन भुगतान किया गया होगा। अतः किसी भी वित्तीय वर्ष जैसे 2010-2011 में मार्च 2010 से फरवरी 2011 तक के वेतन आदि के कुल योग को आय के अन्तर्गत देना चाहिए।

शिक्षक, शिक्षार्थियों की मदद से किसी वित्तीय वर्ष की आय की गणना करवाएँ।

3. कर निर्धारण वर्ष -

वित्तीय वर्ष जिसमें किसी व्यक्ति की पिछले वित्तीय वर्ष की आय पर कर निर्धारण किया जाता है उसे कर निर्धारण वर्ष कहते हैं। जैसे वित्तीय वर्ष 2010-2011 के लिए कर निर्धारण वर्ष 2011-2012 है। और कर निर्धरण वर्ष 2010-2011 के लिए वित्तीय वर्ष 2009-2010 होगा।

4. सकल आय -

किसी वित्तीय वर्ष में सभी स्त्रोतों से प्राप्त कुल आय को सकल आय कहते हैं।

5. स्वीकार्य कटौती -

ऐसी कटौतियाँ जो आयकर से मुक्त होती हैं आयकर का परिकलन करते समय पहले सकल आय में से इन कटौतियों को घटा दिया जाता है और शेष राशि पर आयकर परिकलित किया जाता है।

निम्न कटौतियों को शिक्षक, शिक्षार्थियों को बतायें जो वित्तीय वर्ष 2011-2012 के लिए लागू हैं।

क. मकान किराया भत्ता -

कुछ शर्तों के अधीन वेतनभोगी व्यक्ति को मिलने वाले मकान किराया भत्ते का कुछ अंश आयकर से मुक्त होता है।

ख. धारा 80 जी के अर्न्तगत छूट -

इसके अन्तर्गत सरकार द्वारा निर्धारित सहायता कोषों में दी जाने वाली राशि आयकर से मुक्त होती है।

	कोष का नाम	छूट
1.	प्रधानमंत्री राहत कोष	100%
2.	प्रधानमंत्री सूखा राहत व बाढ़ पीड़ित कोष	100%
3.	राष्ट्रीय सुरक्षा कोष	100%
4.	राष्ट्रीय सैनिक कल्याण कोष	100%
5.	विश्वविद्यालय या राष्ट्रीय स्तर की शिक्षा संस्था	100%
6.	इन्दिरा गाँधी स्मारक ट्रस्ट	50%

ग. धारा 80सी के अन्तर्गत छूट

भविष्य निधि, जीवन बीमा प्रीमियम, राष्ट्रीय बचत पत्र *(N.S.C.)* ट्यूशन फीस, हाउसिंग लोन भुगतान की राशि (अधिकतम सीमा एक लाख रुपये) सकल आय में से कम कर देते हैं।

घ. 80 सी सी एफ के अन्तर्गत छूट

इन्फ्रास्ट्रक्चर बाण्ड (जो कि प्राधिकृत अधिकारी द्वारा स्वीकृत हो) में निवेश की गई राशि (इसकी अधिकतम सीमा 20,000 रुपये) सकल आय में से कम कर देते हैं।

ङ. धारा 80 डी के अन्तर्गत छूट

मेडिक्लेम इंश्योरेंस प्रीमियम हेतु भुगतान की राशि आयकर से मुक्त होती है। इसकी अधिकतम सीमा ₹15000 है। इस राशि को सकल आय में से कम कर देते हैं।

च. धारा 80 यू के अर्न्तगत छूट -

इसके अर्न्तगत सामान्य विकलांग व्यक्तियों हेतु ₹ 60,000 की छूट और अति विकलांग व्यक्तियों हेतु ₹75000 की छूट निर्धारित है।

6. कर योग्य आय

सकल आय से सभी प्रकार की कटौतियों को घटाने से प्राप्त अवशेष आय को कर योग्य आय कहते हैं। कर योग्य आय पर आयकर की गणना की जाती है।

7. आयकर की दरें

प्रत्येक वित्तीय वर्ष के लिए सरकार आयकर की दरें निर्धारित करती है।

शिक्षक नवीनतम आयकर की दरों को शिक्षार्थियों को बतायें।

वित्तीय वर्ष (2010-11) में आयकर की दरें (पुरुष करदाता)

क्र0	कर योग्य आय	आयकर की दरें
1.	₹ 1,60,000 तक	कुछ भी नहीं (कर मुक्त)
2.	₹ 1,60,000 से ₹ 3,00,000 तक	10%
3.	₹ 3,00,001 से ₹ 5,00,000 तक	20%
4.	₹ 5,00,001 से अधिक 30%	
	सरचार्ज	
	शिक्षा कर	3%

नोट : महिलाओं के लिए प्रारम्भिक छूट सीमा ₹ 1,90,000 है।

वरिष्ठ नागरिकों के लिए यह सीमा ₹ 2,40,000 है।

वित्तीय वर्ष 2011-2012 में आयकर की दरें (पुरुष करदाता)

क्र.	कर योग्य आय	आयकर की दरें
1.	₹ 1,80,000 तक	कर मुक्त
2.	₹ 1,80,001 से रु. 5,00,000 तक	₹ 1,80,000 से अधिक राशि का 10%
3.	₹ 5,00,001 से रु 8,00,000 तक	₹ 32,000+5,00,000 से अधिक राशि का 20%
4.	₹ . 8,00,000 से ऊपर	30%
	सरचार्ज	
5.	शिक्षा पर	आयकर का 2%
6.	उच्च सेकण्डरी शिक्षा पर	आयकर का 1%

नोट : महिलाओं के लिए प्रारम्भिक छूट सीमा के स्तर को 1.90 लाख रुपये और वरिष्ठ नागरिकों (60 वर्ष से ऊपर) के लिए 2.5 लाख रुपये तथा अति वरिष्ठ नागरिकों (85 वर्ष से ऊपर) के लिए 5.0 लाख रुपये निर्धारित किया गया है।

वित्तीय वर्ष 2012-2013 के लिए आयकर की दरें

क्र.	कर योग्य आय	आयकर की दरें
1.	₹ 2,00,000 तक	कर मुक्त
2.	₹ 2,00,001 से रु 5,00,000 तक	उस राशि का 10% जो ₹ 2,00,000 से ऊपर हो
2.	₹ 5,00,001 से 10,00,000 तक	₹ 30,000 + उस राशि का 20% जो ₹ 5,00,000 से ऊपर हो
3.	₹ 10,00,001 से अधिक	₹ 0 1,30,000 + उस राशि का 30% जो ₹ 10,00,000 से ऊपर हो।
	सरचार्ज	
1.	शिक्षा पर	आयकर का 2%
2.	उच्च सेकण्डरी शिक्षा पर -	आयकर का 1%

नोट : वरिष्ठ नागरिकों के लिए प्रारम्भिक छूट सीमा के स्तर को 2.5 लाख रुपये तथा अति वरिष्ठ नागरिकों (85 वर्ष से ऊपर) के लिए 5.0 लाख रुपये निर्धारित किया गया है।

उदाहरण - एक कर्मचारी की वित्तीय वर्ष 2009-2010 में आय ₹ 4,60,800 थी। उसने ₹ 2200 प्रतिमाह भविष्य निधि खाते में और ₹ 20,000 अद्धवार्षिक जीव बीमा प्रीमियम में जमा किए।

₹ 28000 के राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदे तथा ₹ 30,000 एक चैरिटेबल ट्रस्ट में दान दिए जिस पर धारा 80 जी के तहत 50% टैक्स से छूट मिलती है।

यदि वह ₹ 1000 प्रतिमाह आयकर 11 माह तक जमा करता है तो, ज्ञात कीजिए कि अन्तिम माह में उसे कितना आयकर जमा करना होगा। आयकर की धारा 80 C के अन्तर्गत सामान्य भविष्य निधि, जीवन बीमा प्रीमियम और राष्ट्रीय बचत पत्र आदि में जमा राशि का कुल 1 लाख रुपये तक आयकर से मुक्त है।

आयकर की दरें निम्नवत हैं -

क्र	कर योग्य सीमा	आयकर की दरें
1.	₹ 1,50,000 तक	शून्य
2.	₹ 1,50,001 से ₹ 300,000 तक	₹ 1,50,000 से अधिक की राशि का 10%
3.	₹ 3,00,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 15,000 + 3,00,000 से अधिक की राशि पर 20%

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% शिक्षा अधिभार भी लगाया गया है।

हल - सकल आय = ₹ 4,46,800

आयकर में छूट की गणना

भविष्य निधि में जमा राशि = 2200 × 12 = ₹ 26,400

जीवन बीमा में जमा राशि = 20,000 × 2 = ₹ 40,000

राष्ट्रीय बचत योजना में जमा राशि = ₹ 28,000

ट्रस्ट में दान की गई राशि = $30{,}000 \times \frac{50}{100}$ = ₹ 15,000

कुल राशि = ₹ 1,09,400

कर योग आय = ₹ 4,60,800 − ₹ 1,09,400 = ₹ 3,51,400

आयकर = ₹ 1,50,000 से ₹ 3,00,000 तक की राशि का 10% = ₹ 15,000 ... 1

$(3{,}51{,}400 - 3{,}00{,}000) \times \frac{20}{100}$ = ₹ 10,280 2

योग (1 + 2) = ₹ *25,280*

शिक्षा कर = $25{,}280 \times \frac{3}{100}$ = ₹ 758.40

देय आयकर = ₹ 25,280 + ₹ 758.40 = ₹ 26,038.40

जमा आयकर = ₹ 1000 × 11 = ₹ 11,000

अन्तिम माह में देय आयकर = ₹ 15,038.40 *(अन्तिम माह में)*

उदाहरण - 2. वित्तीय वर्ष 2011-12 में अनुपम की वार्षिक आय ₹ 5,25,600 है। वह ₹ 50,000 भविष्य निधि में, ₹ 30,000 जीवन बीमा में और ₹ 22,000 राष्ट्रीय बचत योजना में निवेश करता है। यदि वह ₹ 1,500 प्रतिमाह आयकर 11 माह तक जमा करता है तो, ज्ञात कीजिए कि अन्तिम माह में उसे कितना आयकर जमा करना होगा। आयकर की दरें निम्नवत हैं।

क्र.	**कर योग्य आय**	**आयकर की दरें**
1.	₹ 1,80,000 तक	(कर मुक्त) शून्य
2.	₹ 1,80,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 1,80,000 से अधिक राशि का 10%
3.	₹ 5,00,001 से ₹ 8,00,000 तक	₹ 32,000 + 5,00,000 से अधिक राशि का 20%

सरचार्ज

शिक्षा पर - आयकर का 2%

उच्च सेकण्डरी शिक्षा पर - आयकर का 1%

हल - अनुपम की सकल आय = ₹ 5,25,600

आयकर में छूट की गणना

भविष्य निधि में जमा राशि = ₹ 50,000

जीवन बीमा में जमा राशि = ₹ 30,000

राष्ट्रीय बचत योजना में जमा राशि = ₹ 22,000

कुल जमा राशि = ₹ 1,02,000

आयकर में छूट = ₹ 1,00,000 *(अधिकतम सीमा)*

कर योग्य आय = ₹ 5,25,600 − ₹ 1,00,000 = ₹ 4,25,600

आयकर = *(4,25,600 − 1,80,000) का 10%* = ₹ 2,45,600 $\times \frac{10}{100}$

= ₹ 24,560

शिक्षाकर = 24,560 $\times \frac{3}{100}$ = ₹ 736.80 = ₹ 737

देय आयकर = ₹ 24,560 + ₹ 737 = ₹ 25,297

जमा आयकर = ₹ 1500 × 11 = ₹ 16,500

अन्तिम माह में देय आयकर = ₹ 25,297 − ₹ 16,500 = ₹ 8,797

मूल्यांकन

- वित्तीय वर्ष 2011-12 में वेतन भोगी व्यक्ति के लिए आयकर की दरें क्या हैं ?
- वित्तीय वर्ष 2010-2011 के लिए आयकर निर्धारण वर्ष क्या होगा ?
- वर्तमान में कितनी आय, आयकर की सीमा से मुक्त है ?
- किसी व्यक्ति की वित्तीय वर्ष 2011-2012 में वार्षिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) ₹ 6,80,000 थी। उसने ₹ 13000 अर्द्धवार्षिक जीवन बीमा प्रीमियम के रूप में तथा ₹ 4000 मासिक सामान्य भविष्य-निधि में जमा किये। उसने ₹ 5000 का राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदा तथा ₹ 10,000 प्रधानमंत्री राहत कोष में दान दिया। ज्ञात कीजिए कि उसे उस वित्तीय वर्ष में कुल कितनी धनराशि आयकर के रूप में देनी पड़ी।

बिक्रीकर

कुछ वस्तुओं को खरीदने पर हमें एक निर्धारित दर पर कुछ राशि देनी होती है। इस राशि को बिक्रीकर कहा जाता है। अलग-अलग वस्तुओं पर बिक्रीकर की दर अलग-अलग होती है। दैनिक इस्तेमाल में आने वाली कुछ वस्तुओं को बिक्रीकर से मुक्त रखा जाता है। उत्तर प्रदेश में अब बिक्रीकर को मूल्य संवर्धन कर *(VAT)* कहते हैं।

शिक्षक, शिक्षार्थियों को बतायें कि बिक्रीकर का परिकलन सरल होता है। इसमें प्रतिशत की संकल्पना का प्रयोग होता है।

उदाहरण 1 एक साइकिल के सूचीबद्ध मूल्य पर 5% बिक्रीकर दिया जाता है। यदि उत्पल ने उसे ₹ 3150 में क्रय किया हो तो साइकिल का सूचीबद्ध मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल - माना साइकिल का सूचीबद्ध मूल्य = ₹ 100 है।

बिक्रीकर = ₹ 100 का 5% = ₹ $100\times\frac{5}{100}$ = ₹ 5

अतः साइकिल को क्रय करने में दिया गया धन = ₹ 100 + ₹ 5

= ₹ 105

₹ 105 पर साइकिल का मूल्य = ₹ 100

₹ 1 पर साइकिल का मूल्य = $\frac{100}{105}$

₹ 3150 पर साइकिल का मूल्य = $\frac{100}{105}\times3150$

= ₹ 3000

अतः साइकिल का सूचीबद्ध मूल्य = ₹ 3000

उदाहरण - 2. एक दुकानदार एक टी0वी सेट पर 5% की छूट घोषित करता है। यदि टी0वी0सेट का अंकित मूल्य ₹ 18000 है तो ग्राहक को टी0वी0 सेट खरीदने के लिए कुल कितनी रकम देनी होगी, जबकि बिक्रीकर की दर 8% है।

हल - टी0वी0 का अंकित मूल्य = ₹ 18000

छूट = $\frac{5}{100} \times 18000$

= ₹ 900

विक्रय मूल्य = ₹ 18000 − ₹ 900 = ₹ 17100

बिक्रीकर = $\frac{8}{100} \times 17100$ = ₹ 1368

अभीष्ट देय धनराशि = 17100 + 1368

= ₹ 18468

मूल्यांकन

1. एक ग्राहक को एक मोटर साइकिल, जिसका अंकित मूल्य ₹ 65000 है, खरीदने के लिए ₹ 70,600 देना पड़ता है। मोटर साइकिल पर बिक्रीकर की दर ज्ञात कीजिए।
2. एक वाशिंग मशीन का बिक्रीकर सहित विक्रय मूल्य ₹ 9300 है। यदि बिक्रीकर अंकित मूल्य पर 5% की दर से देय हो तो वाशिंग मशीन का अंकित मूल्य क्या होगा ?

इकाई - 7 सांख्यिकी

अध्याय 18 - समान्तर माध्य, माध्यिका, बहुलक

उद्देश्य

- समान्तर माध्य (अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत आँकड़ों के लिये) से परिचित कराना
- माध्यिका (अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत आँकड़ों के लिये) का बोध कराना
- बहुलक (केवल अवर्गीकृत आँकड़ों के लिये) से परिचित कराना।

शिक्षण बिन्दु

- केन्द्रीय प्रवृत्ति
- समान्तर माध्य तथा समान्तर माध्य ज्ञात करने की विधि

  क. कल्पित माध्य विधि

  ख. पद चलन विधि
- माध्यिका (सतत श्रेणी के लिये)
- बहुलक

प्रस्तुतीकरण

शिक्षक इस ओर ध्यान आकर्षित करायें कि आपने अपनी पूर्व कक्षाओं में आँकड़े तथा आँकड़ों के वर्गीकरण का अध्ययन किया है। यहाँ आँकड़ों पर कुछ अन्य संक्रिया करना सीखेंगे।

केन्द्रीय प्रवृत्ति -

आर्थिक सर्वेक्षणों, विभिन्न प्रयोगों तथा शोध में अनेक आँकड़े प्राप्त किये जाते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति का अभिप्राय उस संख्यात्मक माप से है जो प्राप्त आँकड़ों का सबसे अधिक प्रतिनिधित्व करता है। आँकड़ों के समूहों के तुलनात्मक अध्ययन के लिये विभिन्न समूहों की केन्द्रीय प्रवृत्ति का पता लगाना आवश्यक हो जाता है। वह निष्कर्ष जो प्राप्त आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करता है, उसे आँकड़ों के विशेष समूह का सांख्यिकी माध्य अथवा आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते हैं। ये मुख्यतः तीन प्रकार की हैं।

1. समान्तर माध्य 2. माध्यिका 3. बहुलक

समान्तर माध्य

माध्य अथवा समान्तर माध्य से केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप को जान सकते हैं किन्तु कभी-कभी समान्तर माध्य के रूप में प्राप्त आँकड़ा सम्पूर्ण आँकड़े का प्रतिनिधित्व नहीं करता। यदि 50 अंक वाले किसी प्रश्नपत्र में पाँच विद्यार्थी क्रमशः 5,2,3,10 तथा 45 अंक प्राप्त करते हैं तो आँकड़ों से माध्य 13 प्राप्त होता है।

यहाँ माध्य 13 आँकड़ों के समुच्चय का ठीक-ठीक प्रतिनिधित्व नहीं करता क्योंकि तीन प्राप्तांकों (5, 2, 3) से माध्य 13 बहुत अधिक तथा प्राप्तांक 45 से माध्य 13 बहुत कम है।

इस प्रकार के उदाहरणों द्वारा समान्तर माध्य तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति का बोध करायें तथा गुण व अवगुण की ओर ध्यान आकर्षित करें।

समान्तर माध्य का परिकलन

अवर्गीकृत किन्तु सारिणीबद्ध तथा वर्गीकृत एवं सारिणीबद्ध आँकड़ों के समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिये निम्नांकित विधियाँ प्रचलित हैं।

क. प्रत्यक्ष विधि *(Direct Method)*

ख. लघु विधि *(Short Cut Method)*

ग. पद विचलन विधि *(Step Deviation Method)*

क. प्रत्यक्ष विधि

आँकड़ों में दिये गये चर के सभी मानों के योगफल को आँकड़ों की संख्या से भाग देने पर अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य प्राप्त होता है।

यदि चर x के n मान $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ हों तो समान्तर माध्य

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ख. लघु विधि या कल्पित माध्य विधि

पदों की संख्या अधिक तथा संख्यात्मक मान अधिक होने पर इस विधि का उपयोग किया जाता है। इसे निम्नांकित चरणों में करते हैं

1. दिये गये आँकड़ों में से एक पद को कल्पित माध्य मान लेते हैं।
2. प्रत्येक पद से कल्पित माध्य को घटाते हैं तथा कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं।
3. सभी विचलनों को जोड़ कर पदों की संख्या से भाग दे देते हैं। कल्पित माध्य में प्राप्त भागफल को जोड़ने पर अभीष्ट समान्तर माध्य प्राप्त होता है।

माना कल्पित माध्य = A, पदों की संख्या n तथा

विचलन $x_i - A = d_i$ हो तो

$$\overline{X} = A + \frac{\sum d_i}{n} \qquad \text{जहाँ} \quad d_i = x_i - A$$

नोट : कल्पित माध्य, मध्यवर्ती आँकड़ा लेना सुविधाजनक होता है परन्तु इसे कोई भी आँकड़ा ले सकते हैं।

उदाहरण - 1. पाँच शिक्षार्थियों को 200 पूर्णांक में से क्रमानुसार 80,82,85,90 और 103 अंक प्रापत हुये। इन प्राप्तांकों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

हल - माना कल्पित माध्य $A = 85$

प्राप्तांक x_i	**कल्पित माध्य से विचलन** $d_i = X_i - A$
80	80-85 = -5
82	82-85 = - 3
85	85-85 = 0
90	90-85 = + 5
103	103-85 = + 18
$n = 5$	$\Sigma d_i = 15$

समान्तर माध्य $(A.M.)$ $= A + \frac{\sum d_i}{n}$

$= 85 + \frac{15}{5}$

= 85 + 3

= 88

कल्पित माध्य दिये गये आँकड़ों से लेना आवश्यक नहीं है। कल्पित माध्य ऐसा लिया जाना चाहिए जिससे विचलन आसानी से ज्ञात किया जा सके। किन्तु यह आँकड़ों के परिसर में हो।

उदाहरण देखें :

जैसे 6 शिक्षार्थियों के गणित के पूर्णांक 100 में प्राप्तांक निम्नवत हैं :

79, 83, 64, 76, 89, 41

लघु विधि द्वारा स0मा0 ज्ञात कीजिये।

कल्पित माध्य $A = 80$

प्राप्तांक x_i	कल्पित माध्य से विचलन $d_i = X_i - A$
79	79-80 = −1
83	83-80 = 3
64	64-80 = −16
76	76-80 = −4
89	89-80 = + 9
41	41-80 = −39
$n = 6$	$\Sigma d_i = 12 - 60 = -48$

स0माध्य $\overline{X} = A + \frac{\sum d_i}{n} = 80 + \frac{(-48)}{6}$

$= 80 - 8 = 72$

जब आँकड़े अवर्गीकृत हों परन्तु पदों की बारम्बारता एक से अधिक हो तो लघु विधि के विभिन्न चरण निम्नवत हैं।

1. सर्वप्रथम दिये हुए आँकड़ों में से एक संख्या अथवा किसी उपयुक्त संख्या को कल्पित माध्य मान लेते हैं।
2. कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं।
3. विचलन और संगत बारम्बारता का गुणनफल निकालते हैं।
4. गुणनफलों के योग में बारम्बारताओं के योगफल से भाग देकर इसे कल्पित माध्य में जोड़ देते हैं। प्राप्त योगफल समान्तर माध्य *(A.M)* होता है।

कल्पित माध्य = A, पदों की संख्या = n, विचलन $d_i = x_i - A$, संगत बारम्बारता = f_i

$$\text{स0मा0} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n}$$

उदाहरण -

भार (किग्रा में)	41	42	43	44	45
शिक्षार्थियों की संख्या	14	7	8	9	12

कक्षा के शिक्षार्थियों के भार का स0मा0 ज्ञात कीजिए।

हल - लघु विधि द्वारा

माना कल्पित माध्यम $A = 43$

भार (किग्रा) में (X_i)	बारम्बारता (f_i)	विचलन $X_i - A = d_i$	बारम्बारता विचलन $f_i \times d_i$
41	14	$41 - 43 = -2$	$14 \times (-2) = -28$
42	7	$42 - 43 = -1$	$7 \times (-1) = -7$
43	8	$43 - 43 = 0$	$8 \times 0 = 0$
44	9	$44 - 43 = +1$	$9 \times 1 = 9$
45	12	$45 - 43 = +2$	$12 \times 2 = 24$
	$n = 50$		$\Sigma f_i d_i = -2$

स0माध्य $= A + \dfrac{\sum f_i d_i}{n}$ $\quad [\, n = \Sigma f \,] = 50$

$$= 43 + \left(\frac{-2}{50}\right)$$

$= 43 - 0.04 \qquad = 42.96$

अतः शिक्षार्थियों के भारों का स0मा0 = 42.96 किग्रा

इस प्रकार के अन्य उदाहरण दिये जायें :

प्रत्यक्ष विधि द्वारा उपरोक्त उदाहरण को निम्न प्रकार से हल कर सकते हैं।

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{41\times14+42\times7+43\times8+44\times9+45\times12}{14+7+8+9+12}$$

$$= \frac{574+294+344+396+540}{50}$$

$$= \frac{2148}{50}$$

$$= \frac{214.8}{5} \qquad = 42.96$$

स्पष्ट है कि लघु विधि तथा प्रत्यक्ष विधि से प्राप्त उत्तर समान हैं। उपरोक्त उदाहरण की भाँति अन्य उदाहरणों की सहायता से इसे स्पष्ट किया जाना चाहिए।

वर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य

प्रत्यक्ष विधि – इसे निम्नांकित चरणों में पूरा करते हैं।

1. विभिन्न वर्गान्तरों का मध्यमान ज्ञात करते हैं।

   (यहाँ माना जाता है कि किसी वर्ग की बारम्बारता उसके मध्यमान बिन्दु पर केन्द्रित है)

2. प्रत्येक वर्ग अन्तराल के मध्यमान को संगत बारम्बारता से गुणा कर गुणनफलों का योगफल ज्ञात कर लेते हैं।

3. प्राप्त योगफल में पदों की संख्या से भाग देते हैं यही अभीष्ट समान्तर माध्य होता है।

समान्तर माध्य $\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$ जहाँ $n = \sum f_i$

जहाँ वर्ग अन्तराल का मध्यमान $= x_i$

संगत बारम्बारता $= f_i$

बारम्बारताओं का योग $= \Sigma f_i = n$

उदाहरण - निम्नलिखित सारणी से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए

आयु वर्ग वर्षों में	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
संख्या	5	8	6	10	12	9

हल

आयु वर्ग वर्ष अन्तराल	संख्या बाम्बारता (f_i)	मध्यमान (x_i)	$f_i \times x_i$
0-10	5	5	25
10-20	8	15	120
20-30	6	25	150
30-40	10	35	350
40-50	12	45	540
50-60	9	55	495
योग	$n = 50$		1680

समान्तर माध्य $\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{1680}{50} = 33.6$

कल्पित माध्य विधि

इसे निम्न चरणों में किया जाता है।

1. वर्गीकृत आँकड़ों में वर्गों के मध्यमानों के मध्य पड़ने वाली किसी संख्या को कल्पित माध्य A मान लीजिये।

   (कल्पित माध्य का चयन बारम्बारता (f) में से कदापि न किया जाये)

2. प्रत्येक पद में से कल्पित माध्य को घटाकर कल्पित माध्य A से विचलन d ज्ञात कीजिये।

3. प्रत्येक विचलन d तथा उसके संगत f का गुणनफल ज्ञात करके सभी $f.\,d$ का योग ज्ञात किया जाये।

4. विचलनों का माध्य $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

जहाँ $d_i = x_i - A$

अतः $$\bar{d} = \frac{\sum f_i(x_i - A)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i A}{\sum f_i}$$

$$\bar{d} = \bar{X} - A$$

या $$\bar{X} = \bar{d} + A$$

$$\boxed{\mathbf{\bar{X} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} + A}}$$

उदाहरण - 100 अंकों के प्रश्नपत्र में प्राप्त अंकों को वर्गीकृत क्रम में निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया गया है। विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात करिए।

वर्ग अंतराल	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	7	6	6	6

हल - विद्यार्थियों की कुल संख्या = 30

कल्पित माध्य $A = 47.5$

वर्ग अन्तराल	विद्यार्थियों की संख्या बारम्बारता (f_i)	मध्यमान (x_i)	विचलन $(d_i = x_i - A)$	$(f_i d_i)$
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i . d_i = 435$

$$\overline{X} = 47.5 + \frac{435}{30}$$

$$= 47.5 + 14.5$$

$$= 62$$

उपरोक्त सारिणी में d के मान 15 के गुणज मे हैं। यदि उपरोक्त में 15 से भाग दें तो f से गुणा करने में आसानी होगी।

माना $\overline{u}_i = \frac{x_i - A}{h}$ जहाँ A कल्पित माध्य तथा h वर्गमाप है। इसे चयनित सर्वनिष्ठ भाजक भी कह सकते हैं। u_i का औसत मान

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \qquad \overline{u} = \frac{\sum f_i\left(\frac{x_i - A}{h}\right)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{\left[\sum f_i x_i - A\sum f_i\right]}{\sum f_i}$$

या, $\overline{u} = \frac{1}{h}\left(\overline{X} - A\right)$

या, $h.\overline{u} = \overline{X} - A$

या, $\overline{X} = h.\overline{u} + A$

या, $\overline{X} = h.\left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) + A$ जहाँ A कल्पित माध्य, h सर्वनिष्ठ भाजक तथा f बारम्बारता है।

इस विधि को पद विचलन विधि कहते हैं।

इस विधि से स0मा0 ज्ञात कर सकते हैं।

पद विचलन विधि से अवर्गीकृत परन्तु सारिणीबद्ध आँकड़ों का स0मा0

उदाहरण -

x_i	5	6	7	8
f_i	15	25	20	10

हल -

क्रम संख्या	x_i	f_i	$x_i - A = d_i$ $A = 6$	h	$u_i = \frac{x_i - A}{h}$	$f_i . u_i$
1	5	15	-1		-1	-15
2	6	25	0	1	0	0
3	7	20	1		1	20
4	8	10	2		2	20
						$\Sigma f_i . u_i = 25$

$$\bar{X} = A + h \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$

$$= 6 + \frac{1 \times 25}{70}$$

$$= 6 + 0.36$$

$$= 6.36$$

वर्गीकृत और सारणीबद्ध आँकड़ों के समान्तर माध्य, पद विचलन विधि से ज्ञात करना

निम्नलिखित आँकड़ों के समान्तर माध्य पद विचलन विधि से ज्ञात कीजिये

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
4-8	2
8-12	12
12-16	15
16-20	25
20-24	18
24-28	12
28-32	3
32-36	1

हल वर्ग अन्तराल = 4

कल्पित माध्य = 18

क्र.सं.	वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	वर्गों का माध्य बिन्दु	$A = 18$ $X_i - A = d_i$	$u_i = \frac{d_i}{h} = \frac{X-A}{h}$	$f_i . u_i$
1	4-8	2	6	-12	-3	-6
2	8-12	12	10	-8	-2	-24
3	12-16	15	14	-4	-1	-15
4	16-20	25	18	0	0	0
5	20-24	18	22	4	1	18
6	24-28	12	26	8	2	24
7	28-32	3	30	12	3	9
8	32-36	1	34	16	4	4
		$\Sigma f_I = 88$				$\Sigma f_I u_I = 10$

समान्तर माध्य $\overline{X} = A + h.\left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right)$

$$= 18 + \frac{4 \times 10}{88}$$

$$= 18 + \frac{5}{11}$$

$$= 18 + 0.455$$

$$= 18.46$$

इस प्रकार के अन्य उदाहरण द्वारा शिक्षार्थियों को अभ्यास कराया जाय।

मध्यिका

शिक्षक स्पष्ट करें कि आँकड़ों को आरोही अथवा अवरोही पदों में रखने पर मध्य में आने वाला पद माध्यिका होता है।

जब आँकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिखते हैं, तब अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने के लिये निम्न प्रक्रिया अपनायी जानी चाहिए।

क. श्रेणी या प्रेक्षणों (आँकड़ों) को आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिखें।

ख. (अ) यदि पदों की संख्या n विषम है तो $\frac{n+1}{2}$ वाँ पद मध्य पद होगा अर्थात $M = \frac{n+1}{2}$ वाँ पद अभीष्ट माध्यिका होगी।

(ब) यदि पदों की संख्या n सम है तो दो मध्य पद क्रमशः $\frac{n}{2}$ वाँ तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद होंगे। इस स्थिति में माध्यिका इन दोनों पदों के योग के आधे के बराबर होगी।

$$\text{माध्यिका } M = \frac{\frac{n}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ वाँ पद}}{2}$$

जहाँ n पदों की सम संख्या है।

निम्न प्रकार के उदाहरण से इसे और स्पष्ट किया जाये।

उदाहरण-1. एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों के (सेन्टीमीटर में) लम्बाइयाँ निम्नांकित हैं :

155, 160, 145, 149, 150, 147, 152, 144, 148। इनकी माध्यिका ज्ञात करने के लिये इन्हें आरोही क्रम में लिखना होगा। इसे निम्न प्रकार से कर सकते हैं। सर्वप्रथम निम्नतम संख्या को लिखते हैं। तत्पश्चात इस संख्या को आँकड़ों में चिन्हित करते हैं। चिन्हित संख्या को छोड़कर शेष आँकड़े में पुनः सबसे छोटी संख्या लिखते हैं और इसे चिन्हित कर देते हैं। इस क्रिया को तब तक करते हैं, जब तक सभी संख्या को चिन्हित न कर दें। उपरोक्त आँकड़े में आरोही क्रम निम्नवत होगा।

144, 145, 147, 148, 149, 150, 152, 155, 160। विद्यार्थियों की संख्या 9 है जो कि विषम है इसलिए आरोही क्रम के $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें = $\left(\frac{9}{2}+1\right)$ वें = 5वें विद्यार्थी की लम्बाई 149 सेमी है और यही माध्यिका है। माध्यिका M = 149 सेन्टीमीटर।

उदाहरण- 2. किसी कक्षा मे गणित विषय के पूर्णांक 20 में 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्नवत् है।

10, 13, 17, 19, 12, 15, 9, 20, 18 और 16; अंकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल - पदों की संख्या n = 10 सम है।

इन अंकों को अवरोही क्रम में लिखने के लिये सर्वप्रथम दिये गये आँकड़ों में से उच्चतम संख्या लिखते हैं तथा इस संख्या को आँकड़ें में चिन्हित कर लेते हैं, शेष आँकड़े में पुनः सबसे बड़ी संख्या लिखते हैं तथा इसे भी आँकड़े में चिन्हित करते हैं।

इस क्रिया को तब तक करते हैं जब तक कि सभी संख्याओं को चिन्हित न कर दें।

अवरोही क्रम निम्नवत् होगा

20, 19, 18, 17, 16, 15, 13, 12, 10, 9

$$\text{माध्यिका } M = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{16+15}{2} = \frac{31}{2}$$

$$= 15.5$$

जब आँकड़े अवर्गीकृत हों परन्तु सारिणीबद्ध हों

यदि आँकड़े में बारम्बारता हो तो माध्यिका ज्ञात करने के लिये निम्न प्रक्रिया अपनानी चाहिए।

1. श्रेणी को आरोही क्रम में लिखना चाहिए (यदि न लिखी हो)
2. बारंबारता से कुल संचयी बारंबारता ज्ञात कर लेना चाहिए।
3. माध्यिका संख्या $M = \frac{n+1}{2}$ ज्ञात करें जहाँ $n =$ कुल बारंबारता है।
4. यह देखें कि माध्यिका संख्या किस संचयी बारम्बारता में आती है।
5. माध्यिका संख्या जिस संचयी बारंबारता में आती है उसके सामने वाला पद माध्यिका होता है।

उदाहरण - निम्नलिखित बारम्बारता बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिये

अंक	3	5	6	8	12	20	25	38
बारम्बारता	2	7	3	5	8	6	5	5

संचयी बारम्बारता सारिणी निम्न प्रकार है।

अंक	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
3	2	2
5	7	9
6	3	12
8	5	17
12	8	25
20	6	31
25	5	36
38	5	41
योग	$n = 41$	

यहाँ $n = \sum f$ = कुल बारम्बारता या पदों की कुल संख्या, यहाँ यह संख्या विषम है।

माध्यिका $M = \frac{n+1}{2}$ वाँ पद $= \frac{41+1}{2}$ = 21वाँ पद

= 12

इसी प्रकार यदि पदों की कुल संख्या सम हो तो दो मध्य पद होंगे

जैसे किसी कक्षा के 24 शिक्षार्थियों की (वर्षों में) आयु के आँकड़े निम्नलिखित हैं, आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

आयु वर्षों में	12	13	14	15	16
शिक्षार्थी	4	5	4	6	5

उपर्युक्त बारम्बारता बंटन की संचयी बारम्बारता सारिणी निम्नवत् है :

आयु वर्षों में	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
12	4	4
13	5	9
14	4	13
15	6	19
16	5	24
	योग n = 24	

यहाँ n = 24 अर्थात पदों की संख्या सम है। इससे माध्यिका ज्ञात करने के लिये पहले $\frac{n}{2}$ वाँ पद तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद ज्ञात करना होगा।

$\frac{n}{2}$ वाँ पद $= \frac{24}{2}$ वाँ पद = 12 वाँ पद

$\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद $= \left(\frac{24}{2}+1\right)$ वाँ पद = 13 वाँ पद

$$\text{माध्यिका } M = \frac{\frac{n}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ वाँ पद}}{2}$$

$= \frac{12\text{वाँ पद} + 13\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{14+14}{2} = 14$ वर्ष

इस प्रकार के अन्य उदाहरणों से विद्यार्थियों को अभ्यास कराया जाना चाहिए।

वर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका

विद्यार्थियों को बोध कराया जाय कि वे दिये गये आँकड़ों की संख्या सम अथवा विषम होने की स्थिति में माध्यिका की गणना विधि से परिचित हैं, किस प्रकार असतत श्रेणी के लिये सबसे पहले श्रेणी के पदों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखकर संचयी बारम्बारता ज्ञात की जाती है, तत्पश्चात मध्य पद का मान ज्ञात करते हैं। बताया जाये कि मध्य पद स्वयं माध्यिका नहीं होती बल्कि इसके मान *(मूल्य)* माध्यिका होता है। अवर्गीकृत आँकड़ों के लिये माध्यिका ज्ञात करने की विधि से परिचित हो चुके हैं। वर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने के निम्न नियम हैं।

1. समावेशी वर्ग हों तो उन्हें अपवर्ती वर्ग में बदल लेना चाहिए

   समावेशी वर्ग 0-4, 5-9, 10-14, 15-19, 20-24,....

   अपवर्जी वर्ग 0-5, 5-10, 10-15, 15-20, 20-25,...
2. आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखकर संचयी बारम्बारता निकालते हैं।
3. माध्यिका संख्या $m = \frac{n}{2}$ तथा $\frac{n}{2}+1$ जब n सम है और $m = \frac{n}{2}+1$ जब n विषम है, जहाँ n बारम्बारताओं का योग है।
4. माध्यिका संख्या जिस संचयी बारम्बारता में आती है उसके सामने वाला वर्ग माध्यिका वर्ग कहलाता है।
5. माध्यिका ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$M = l_1 + \left(\frac{l_2 - l_1}{f}\right)\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

जहाँ l_1 = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

l_2 = माध्यिका वर्ग की उच्च सीमा

f = माध्यिका वर्ग की बारम्बारता।

n = बारम्बारताओं का योग

c = माध्यिका वर्ग से पहले वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता।

उदाहरण - एक विद्यालय के 245 विद्यार्थियों ने गणित विषय में 20 पूर्णांक के प्रश्न पत्र में परीक्षा देने के पश्चात अंक प्राप्त किये। प्राप्ताकों का विवरण निम्नवत् है।

प्राप्तांक वर्ग	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
विद्यार्थियों की संख्या	6	53	85	56	21	16	4	4

हल - उपरोक्त की संचयी बारम्बारता सारिणी निम्नवत् है।

क्र.सं.	प्राप्तांक (वर्ग अन्तराल)	शिक्षार्थियों की संख्या बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
1	1-3	6	6
2	3-5	53	59
3	5-7	85	144
4	7-9	56	200
5	9-11	21	221
6	11-13	16	237
7	13-15	4	241
8	15-17	4	245
	योगफल	$n = 245$	

माध्यिका संख्या $\frac{n+1}{2}$ वें पद का मान

$$= \left(\frac{245+1}{2}\right) \text{ वें पद का मान} = 123 \text{ वें पद का मान}$$

123 वें पद का मान संचयी बारम्बारता 144 में स्थित है जिसका वर्ग अन्तराल 5-7 है जो कि माध्यिका वर्ग है।

माध्यिका $m = l_1 + \left(\frac{l_2 - l_1}{f}\right)\left(\frac{n}{2} - c\right)$ (यहाँ $l_1 = 5, l_2 = 7, f = 85, n = 245, c = 59$)

$$= 5 + \left(\frac{7-5}{85}\right)\left(\frac{245}{2} - 59\right)$$

$$= 5 + \left(\frac{2}{85}\right)\left(\frac{127}{2}\right)$$

$= 5+\frac{127}{85} = 5 + 1.5$

$= 6.5$

उदाहरण 2 - माध्यिका ज्ञात कीजिये

भार (किग्रा में)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	162-171	172-180
बारंबारता 3	5	9	12	5	4	2	

हल : उपरोक्त में वर्ग समावेशी वर्ग है, इसे अपवर्जी वर्ग मे निम्न प्रकार से बदलें

क्र.सं.	भार (किग्रामें)	भार (किग्रा में) (अपवर्जी रूप)	बारंबारता	संचयी बारंबारता
1	118-126	117.5-126.5	3	3
2	127-135	126.5-135.5	5	8
3	136-144	135.5-144.5	9	17
4	145-153	144.5-153.5	12	29
5	154-162	153.5-162.5	5	34
6	163-171	162.5-171.5	4	38
7	172-180	171.5-180.5	2	40
	योगफल		$n = 40$	

$\frac{n}{2}$ वें पद का मान = 20 वें पद का मान

$\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें पद का मान = 21 वें पद का मान

यहाँ 20वें पद का मान तथा 21वें पद का मान संचयी बारम्बारता 29 में अर्थात वर्ग अन्तराल 114.5-153.5 में स्थित है।

माध्यिका $M = l_1 + \left(\frac{l_2 - l_1}{f}\right)\left(\frac{n}{2} - c\right)$ (प्रश्नानुसार $l_1 = 144.5$, $l_2 = 153.5$, $f = 12$,

$= 144.5 + \left(\frac{153.5 - 144.5}{12}\right)(20-17)$ $n = 40$, $c = 17$)

$= 144.5 + \left(\frac{9}{12}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$

$= 144.5 + \frac{9}{4}$

$= 144.5 + 2.25$

$= 146.75$ किलोग्राम

बहुलक

(अवर्गीकृत आँकड़ों के लिये)

आँकड़ों में सर्वाधिक आवृत्ति वाले पद को बहुलक कहते हैं, उदाहरण के लिये किसी कक्षा के विद्यार्थियों के प्रतिदिन के व्यय (रुपयों में) निम्नवत् हैं -

8, 19, 11, 12, 12, 10, 15, 16, 12, 17, 9 और 12

इस उदाहरण में सर्वाधिक आवृत्ति वाला पदमान 12 है

अतः बहुलक = 12

बहुलक ज्ञात करने की यह विधि निरीक्षण विधि है।

ऐसी व्यक्तिगत श्रेणियों में जहाँ पदों की संख्या बहुत अधिक हो, निरीक्षण विधि द्वारा बहुलक ज्ञात करना सुगम नहीं होता। ऐसी स्थित में व्यक्तिगत श्रेणी को असतत श्रेणी में परिवर्तित कर बहुलक ज्ञात कर लेते हैं। इस श्रेणी में जिस पद की बारम्बारता सबसे अधिक होती है, वही बहुलक अंक होता है।

उपरोक्त उदाहरण लेने पर

चर (रुपये में)	बारम्बारता
8	।
9	।
10	।
11	।
12	।।।।
15	।
16	।
17	।
19	।

चर 12 की बारम्बारता (आवृत्ति) सर्वाधिक है।

अतः बहुलक = 12

इस प्रकार से शिक्षार्थियों को अन्य उदाहरणों के माध्यम से बहुलक का बोध कराया जाय।

इकाई - 8 त्रिकोणमीति

अध्याय 19 - त्रिकोणमितीय अनुपात तथा सर्वसमिकाएँ

उद्देश्य

- त्रिकोणमितीय अनुपातों का बोध हो सकेगा।
- परिक्रामी रेखा के परिक्रमण से बनने वाले कोणों का बोध हो सकेगा।
- कोणों के षाष्टिक माप एवं वृत्तीयमाप को समझ सकेंगे।
- किसी कोण के षाष्टिक माप एवं वृत्तीय माप के बीच के सम्बन्ध को समझ सकेंगे।
- कोणों $(n \times 360° \pm \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों का बोध हो सकेगा।
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिका का अर्थ समझ सकेंगे।
- मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओ

  (i) $sin^2 \theta + cos^2 \theta = 1$

  (ii) $sec^2 \theta = 1 + tan^2 \theta$

  (iii) $cosec^2 \theta = 1 + cot^2 \theta$ की समझ बना सकेंगे।
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करना सीख सकेंगे।

शिक्षण बिन्दु

- कोणों के षाष्टिक माप *(Sexagesimal measure)* एवं वृत्तीय माप *(circular measure)*
- परिक्रामी रेखा के परिक्रमण से बनने वाले कोण
- π रेडियन के पदों में कोणों 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0 को व्यक्त करना
- $(n \times 360 \pm \theta)$ माप के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात
- मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

  (i) $sin^2 \theta + cos^2 \theta = 1$

  (ii) $sec^2 \theta = 1 + tan^2 \theta$

  (iii) $cosec^2 \theta = 1 + cot^2 \theta$

सरल निरूपण

कोणों के षाष्टिक माप *(sexagesimal measure)* एवं वृत्तीय माप *(circular measure)*

सामान्यतः कोणों के माप की हम दो विधियों से कर सकते हैं :

(1) षाष्टिक माप

(2) वृत्तीय माप

(1) षाष्टिक माप = कोणों के माप की इस पद्धति में वृत्त के केन्द्र पर बनने वाले सम्पूर्ण कोण को 4 समकोण के बराबर मानते हैं, अर्थात

4 समकोण = 360^0

या 1 समकोण = 90^0

तथा $1^0 = 60$ मिनट $= 60'$

1 मिनट = 60 सेकेण्ड $= 60''$

इस पद्धति में कोण माप की एक इकाई 1 अंश होती है जिसे संकेत रूप में 1^0 लिखते हैं।

(2) वृत्तीय माप - इस पद्धति में कोणमाप की इकाई को रेडियन कहते हैं जो किसी वृत्त के केन्द्र पर उस चापखंड द्वारा अन्तरित कोण होता है जिसकी लंबाई उस वृत्त की त्रिज्या के बराबर होता है।

$\theta = 1$ रेडियन

संकेत रूप में $\theta = 1^C$

षाष्टिक माप एवं वृत्तीय माप में परस्पर सम्बन्ध

हम जानते हैं कि किसी वृत्त के केन्द्र पर बनने वाला सम्पूर्ण कोण 360^0 के बराबर होता है जो उस वृत्त के सबसे बड़े चापखंड जिसकी लम्बाई स्पष्टतः $2\pi r$ होगी, के द्वारा अन्तरित होता है, अतः रेडियन के रूप में इस कोण को व्यक्त करने पर

$$360^0 = \frac{2\pi r}{r} \text{ रेडियन}$$

या, $360^0 = 2\pi$ रेडियन $= 2\pi$ (संक्षेप में)

$$\text{अर्थात् 1 रेडियन} = \frac{360^0}{2\pi}$$

$$= \frac{180^0}{\pi} \qquad = \frac{180^0}{3.14} \text{ लगभग}$$

$= 57^0\ 17'\ 45''$ लगभग

और $1^0 = \frac{2\pi}{360}$ रेडियन

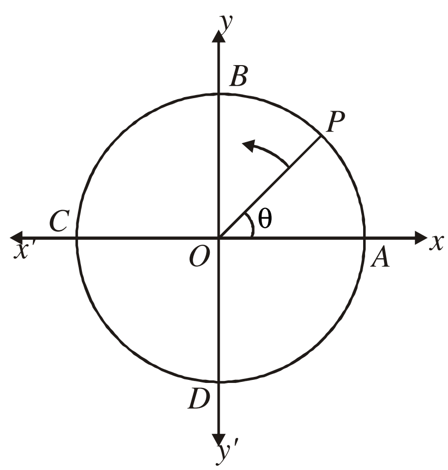
$= \frac{3.14}{180}$ रेडियन

= 0.0174 रेडियन लगभग

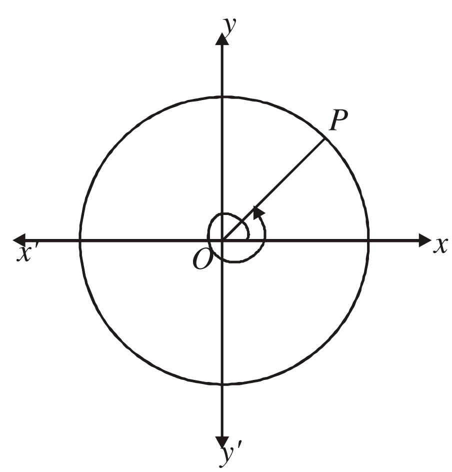
टिप्पणी : यदि कोण का माप रेडियन में दिया गया है। तो रेडियन का संकेत चिन्ह नहीं लगाते हैं, जैसे $2\pi^c$ (2π रेडियन) को केवल ही 2π लिखते हैं, किन्तु जब कोण का आप अंश में दिया जाता है तो अंश का संकेत चिन्ह ^{0} अवश्य लगाते हैं। जैसे 180^0 को हमेशा 180^0 ही लिखेंगे। इस प्रकार यदि कोण माप θ लिखा है तो इसका अर्थ है θ रेडियन और जब कोणमाप अंश में माप गया है तो θ के ऊपर अंश का संकेत चिह्न ^{0} अवश्य लगायेंगें यथा θ° ।

परिक्रामी रेखा के परिक्रमण से बनने वाले कोण

शिक्षक शिक्षार्थियों से भिन्न-भिन्न माप की त्रिज्याओं के वृत्त खिंचवायें तथा उन वृत्तों में 1 रेडियन का कोण प्रदर्शित करने का अभ्यास करायें तथा उन्हें परिक्रामी रेखा *(Revolving line)* तथा परिक्रामी रेखा के परिक्रमण *(Revolution)* का बोध करायें। उन्हें समझाये कि किस तरह परिक्रामी रेखा के परिक्रमण से वृत्त के केन्द्र पर भिन्न-भिन्न माप के कोण बनते हैं।



उपर्युक्त चित्र में OP परिक्रामी रेखा है जो वृत्त के केन्द्र O पर x- अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ कोण θ बना रही है, जो इस स्थिति में न्यूनकोण है। स्पष्टतः परिक्रामिक रेखा द्वारा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA से परिक्रमण प्रारम्भ कर एक पूर्ण घूर्णन में (पूरे एक चक्कर में) केन्द्र O पर बना कोण θ, 0^0 से लेकर 360^0 तक का हो सकता जब $\theta = 90^0$ तो परिक्रमण रेखा से OP, OB सन्निपतित हो जायेगी, जब $\theta = 180^0$ तो उस स्थिति में परिक्रमण रेखा OP, OC से संपाती हो जायेगी और जब $\theta = 270^0$ तो OP, OD के साथ तथा जब $\theta = 360^0$ तो OP अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA के साथ संपाती हो जायेगी। परिक्रामी रेखा OP की प्रारम्भिक स्थिति OA ही रही होगी जब इसने X- अक्ष की धनात्मक दिशा से 0^0 का कोण बनायी रही होगी।



अब कल्पना कीजिए कि परिक्रामी रेखा केन्द्र बिन्दु O के परितः पूरा एक चक्कर लगाने के बाद पुनः दूसरा चक्कर प्रारम्भ करते हुए OP की स्थिति में आ गयी है जहाँ $\angle POX = \theta$ तो इस दशा में परिक्रामी रेखा द्वारा X- अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बना हुआ सम्पूर्ण कोण $(360^0 + \theta)$ या $2\pi + \theta$ के बराबर होगा। इसी प्रकार यदि परिक्रामी

रेखा ने केन्द्र बिन्दु O के परितः दो चक्कर पूरा करने के बाद तीसरे-चक्कर में OP की स्थिति में आ गयी है तो इस दशा में परिक्रामी रेखा द्वारा X- अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाया गया सम्पूर्ण कोण $(2 \times 2\pi + \theta)$ के बराबर होगा हम कल्पना कर सकते हैं कि केन्द्र बिन्दु O के परितः पूरे n चक्कर लगाने के बाद यदि परिक्रामी रेखा $(n + 1)$ वें चक्कर में OP स्थिति में आती है तो उस दशा में केन्द्र पर बना सम्पूर्ण करेगा $= (n \times 2\pi + \theta)$

ध्यान दीजिए कि यहाँ n एक धनपूर्णांक है क्यों कि परिक्रमण की दिशा X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बामावर्ती *(AntiClock-wise)* संकल्पित की गयी है।

परिक्रामी रेखा X-अक्ष की धनात्मक दिशा से दक्षिणावर्ती घूर्णन करते हुए यदि OP स्थिति में होती है तो $\angle XOP = -\theta$ यहाँ भी इस स्थिति में पहुँचने के पूर्व यह बामावर्ती अथवा दक्षिणावर्ती दिशाओं में n चक्कर पूरे कर सकती है और उस स्थिति मे केन्द्र O पर उसके द्वारा बनाया गया। सम्पूर्ण कोण $(2n\pi - \theta)$ के तुल्य होगा जहाँ n एक धनात्मक या ऋणात्मक पूर्णांक है, जो परिक्रामी रेखा के घुमने की दिशा पर निर्भर करेगा।

मान लीजिए $n = 1$ तथा $\theta = 30°$ तो परिक्रामी रेखा X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ जो कोण बनाती है, उसका अंश माप $= 1 \times 360^0 - 30^0 = 330^0$

इसी प्रकार $n = 2$ होने पर

उक्त अंश माप $= 2 \times 360^0 - 30^0 = 690^0$

और यदि $n = -1$, तब

उक्त अंशमाप $= (-1) \times 360^0 - 30^0 = -390^0$ इत्यादि

π रेडियन के पदों में कोणों 15°, 30°, 45°, 60°, 90° को व्यक्त करना

हम जान चुके हैं कि

π रेडियन $= 180^0$

अतः $1^0 = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

अत : $15° = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ रेडियन $= \frac{\pi}{12}$

$30° = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ रेडियन $= \frac{\pi}{6}$

$$45° = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ रेडियन} = \frac{\pi}{4}$$

$$60° = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ रेडियन} = \frac{\pi}{3}$$

$$90° = 90 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \text{ रेडियन} = \frac{\pi}{2}$$

$$120° = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \text{ रेडियन} = \frac{2\pi}{3}$$

$$270° = 270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \text{ रेडियन} = \frac{3\pi}{2}$$

$$450° = 450 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{2} \text{ रेडियन} = \frac{5\pi}{2}$$

$$720° = 720 \times \frac{\pi}{180} = 4\pi \text{ रेडियन} = 4\pi \text{ इत्यादि}$$

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि

किसी कोण के अंशमाप को रेडियन में बदलने के लिए अंशों की संख्या का $\frac{\pi}{180}$ में गुणा करना चाहिए अर्थात $\theta° = \theta \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन

$(n \times 360° \pm \theta)$ माप के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

शिक्षक शिक्षार्थियों का ध्यान आकृष्ट करें कि उन्होंने पूर्व कक्षा में 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, $(90^0 \pm \theta)$, $(180^0 \pm \theta)$ के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का ज्ञान प्राप्त किया है। उसी क्रम में अब उन्हें $(n \times 360^0 \pm \theta)$ के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों का ज्ञान प्राप्त करना है।

उपर्युक्त चित्र से स्पष्ट है कि परिक्रामी रेखा O के परितः दो पूरे चक्कर लगाकर X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ θ अंश का कोण बना रही है। वास्तव में उसने कुल $(2 \times 360^0 + \theta)$ या $(2 \times 2\pi + \theta)$ के बराबर कोण X-अक्ष की धनदिशा के साथ बनाये हैं। इस प्रकार यदि हम देखें तो वास्तव में कोण θ ही बना। इसी प्रकार यदि परिक्रामी रेखा n पूरे चक्कर लगाने के बाद OP स्थिति में आती है तो उसके द्वारा X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बना हुआ कोण

$(n \times 360^0 + \theta)$ या $(2n\pi + \theta)$ θ के तुल्य ही है।

अतः उपर्युक्त चित्र में,

$$\sin(2n\pi+\theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\cos(2n\pi+\theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(2n\pi+\theta) = \frac{PM}{OM} = \tan\theta \text{ इत्यादि}$$

आप यह भी देख सकते हैं कि

$$\sin(-n\times 2\pi+\theta) = \sin\theta$$

इसी प्रकार

$$\cos(-n\times 2\pi+\theta) = \cos\theta$$

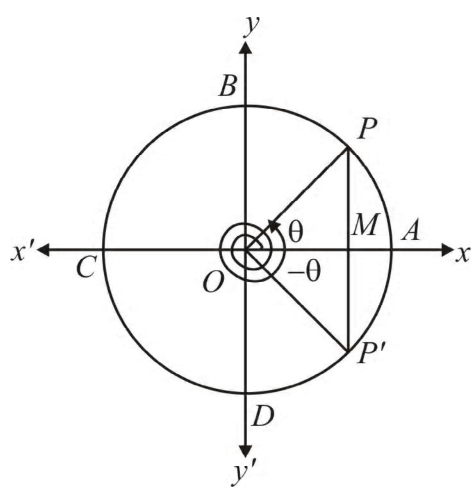
और

$$\tan(-n\times 2\pi+\theta) = \tan\theta$$

अतः यदि n एक पूर्णांक है तो $(n \times 360^\circ + \theta)$ अर्थात $(2n\pi + \theta)$ माप के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात वही होते हैं जो कोण θ के होते हैं।

$(n \times 360^\circ - \theta)$ या $(2n\pi - \theta)$ माप के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

यदि परिक्रामी रेखा बामावर्ती दिशा में पूरा एक चक्कर लगाकर पुनः दक्षिणावर्ती दिशा में घूम कर X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ θ के बराबर कोण बनाती है (उपर्युक्त चित्रानुसार) तो उस स्थिति में वह बिन्दु O के परितः $(2\pi - \theta)$ का कोण बनाती है। कल्पना कीजिए कि यदि परिक्रामी रेखा बामावर्ती दिशा में पूरे n चक्कर लगाने के बाद दक्षिणावर्ती दिशा में घूम कर X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ θ के बराबर कोण बनाती है तो उस स्थिति में वह बिन्दु O के परितः $(n \times 2\pi - \theta)$ का कोण बनाती है, जहाँ n धनपूर्णांक है।



मान लीजिए कि वह प्रारम्भ से ही दक्षिणावर्ती दिशा में n पूरे चक्कर लगाकर $(n + 1)$ वें चक्कर में X-अक्ष की दिशा के साथ कोण θ बनाती है तो वह वस्तुतः बिन्दु O के परितः कुल $(-n\times 2\pi - \theta)$ या $(-2n\pi - \theta)$ का कोण बनाती हैं।

उपर्युक्त दोनों स्थितियों को एक साथ समेकित कर हम मान सकते हैं कि परिक्रामी रेखा बिन्दु O के परितः $(n\times 360^0 - \theta)$ या $(2n\pi - \theta)$ का कोण बना रही है जहाँ n एक पूर्णांक है।

इस दशा में भी $(n \times 360^0 - \theta)$ या $(2n\,\pi - \theta)$ का कोण वस्तुतः $(-\theta)$ के बराबर ही है। अतः

$$\sin(n\times 2\pi-\theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(n\times 2\pi-\theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(n\times 2\pi-\theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$$ इत्यादि

टिप्पणी : उपर्युक्त चित्र में आप देख सकते हैं कि

$$\sin(-\theta) = \frac{P'M}{OP'} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{P'M}{OM} = \frac{-PM}{OM} = -\tan\theta$$ इत्यादि

उपर्युक्त विवेचनों से निष्कर्ष प्राप्त होता है कि

$(n \times 360^0 \pm \theta)$ के कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात $(\pm\theta)$ कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात के बराबर होते हैं।

मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

सर्वप्रथम शिक्षक शिक्षार्थियों को बोध करायें कि किसी चर (या चरों) वाली कोई भी समिका जब उसमें प्रयुक्त चर (या चरों) के सभी मानों के लिए संतुष्ट होती है, तब वह एक सर्वसमिका होती है। 'सर्वसमिका' दो शब्दों 'सर्व' और 'समिका' के योग से बना है। जिसका अर्थ है सर्व अर्थात् सभी (प्रयुक्त चर या चरों के सभी) मानों के लिए समिका। उदाहरण के लिए $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ एक सर्वसमिका है क्योंकि a और b के सभी मानों के लिए इस समिका का बायाँ पक्ष सदैव इसके दायाँ पक्ष के बराबर है। उपर्युक्त एक बीजीय सर्वसमिका है। त्रिकोणमितीय अनुपातों से युक्त समिकाएँ जब उसमें प्रयुक्त सभी चर या चरों के सभी मानों से संतुष्ट होती हैं, तब वे त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ कहलाती हैं।

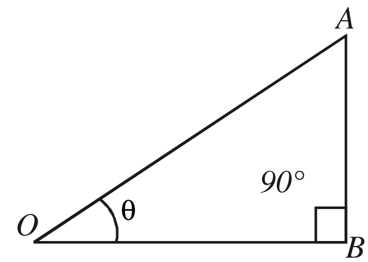
हम लोग सर्वप्रथम यहाँ तीन मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं पर विचार करेंगे जो निम्नांकित हैं :

1. $sin^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1$
2. $sec^2\,\theta = 1 + tan^2\,\theta$
3. $cosec^2\,\theta = 1 + cot^2\,\theta$

पार्श्वचित्र में Δ ABO एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण $B = 90^0$ तथा मान लीजिए कि $\angle AOB = \theta$

अब इस समकोण त्रिभुज में बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय से

लम्ब^2 + आधार^2 = कर्ण^2



अर्थात $AB^2 + OB^2 = OA^2$ .... (1)

उपर्युक्त समी. (1) में दोनों पक्षों में OA^2 से भाग देने पर

$$\frac{AB^2}{OA^2} + \frac{OB^2}{OA^2} = 1$$

या $$\left(\frac{AB}{OA}\right)^2 + \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = 1$$

या $$(\sin\ \theta)^2 + (\cos\ \theta)^2 = 1$$

या $$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad .... (2)$$

पुनः समी. (1) के दोनों पक्षों में OB^2 से भाग देने पर

$$\frac{AB^2}{OB^2} + 1 = \frac{OA^2}{OB^2}$$

या $$\left(\frac{AB}{OB}\right)^2 + 1 = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2$$

या $$(\tan\ \theta)^2 + 1 = (\sec\ \theta)^2$$

या $$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

या $$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 \quad .... (3)$$

पुनः समी. 1 के दोनों पक्षों में AB^2 का भाग देने पर

$$1 + \frac{OB^2}{AB^2} = \frac{OA^2}{AB^2}$$

या $$1 + \left(\frac{OB}{AB}\right)^2 = \left(\frac{OA}{AB}\right)^2$$

या $$1 + (\cot\theta)^2 = (\operatorname{cosec}\theta)^2$$

या $$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

या $$\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta \quad .... (4)$$

टिप्पणी : उपर्युक्त तीनों त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ न्यूकोण θ के लिए सिद्ध की गई हैं किन्तु ये θ के सभी मानों के लिए सदैव सत्य हैं। शिक्षक θ के समकोण, अधिकोण, वृहत्कोण आदि सभी मानों के कुछ उदाहरण लेकर शिक्षार्थियों से प्रतिस्थापन विधि से इन सर्वसमिकाओं का सत्यापन करायें।

समिकाएँ *(2), (3)* और *(4)* चर θ के सभी मानों से संतुष्ट होंगी। शिक्षक शिक्षार्थियों से इसका सत्यापन करायें। $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, ...$ आदि मानों को उपर्युक्त तीनों समिकाओं में प्रतिस्थापित कर आप देख सकते हैं इन समिकाओं का बायाँ पक्ष सदैव इनके दायाँ पक्ष के बराबर है।

क्या θ का कोई ऐसा मान प्राप्त किया जा सकता है जिसके लिए समिकाएँ *(2), (3), (4)* संतुष्ट न हो रही हों?

इसका उत्तर ज्ञात करने में शिक्षक शिक्षार्थियों का मार्गदर्शन करें।

कुछ साधित उदाहरण

उदाहरण 1 - $\sin(-1050^0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - $\sin(-1050^0)$

$= \sin(-1080^0 + 30^0)$

$= \sin(-3 \times 360^0 + 30^0)$

$= \sin 30^0$ [$\sin(-2n\pi + \theta) = \sin\theta$ से]

$= \frac{1}{2}$

उदाहरण 2 - $\cos\frac{7\pi}{3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{3}$ [$\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$ से]

$= \frac{1}{2}$

उदाहरण 3 - $\tan\frac{19\pi}{6}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - $\tan\frac{19\pi}{6} = \tan\left(2\pi + \frac{7\pi}{6}\right)$

$= \tan\frac{7\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

उदाहरण 4 - सिद्ध कीजिए : $\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8} = 0$

हल - बाँया पक्ष $\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8}$

$$\sin\frac{\pi}{8} - \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{8}\right) + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}$$

= 0

= दायां पक्ष, अतः सिद्ध हुआ।

उदाहरण 5 - सिद्ध कीजिए $\frac{1+\tan^2 A}{\cos ec^2 A} = \tan^2 A$

हल - बाँया पक्ष $\frac{1+\tan^2 A}{\cos ec^2 A}$

$$= \frac{\sec^2 A}{\cos ec^2 A}$$ (क्यांकि $sec^2 A = 1 + tan^2 A$))

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}} = \frac{1}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{1}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = tan^2 A =$$

दायाँ पक्ष

अतः सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6 - सिद्ध कीजिए कि $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

हल - बायाँ पक्ष $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad [\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta]$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta+\sec\theta)\ \{\ 1-(\sec\theta-\tan\theta)\ \}}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$$= \frac{(\tan\theta+\sec\theta)\,(\tan-\sec\theta+1)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)}$$

$$= \tan\theta+\sec\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$ दायाँ पक्ष

अतः सिद्ध हुआ।

मूल्यांकन

1. $\cos 780°$ का मान होगा

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) 1

2. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin^2 25^0+\sin^2 65^0}{\cos^2 35^0+\cos^2 55^0} = 1$

3. सिद्ध कीजिए कि $\tan 70^0 \cot 20^0 - \text{cosec } 20^0 \sec 70^0 = -1$

4. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \cos ecA - \cot A$

5. सिद्ध कीजिए कि $\cos^4 A-\sin^4 A = \cos^2 A-\sin^2 A = 1-2\sin^2 A$

6. $\frac{\cot B+\cos ec\ B-1}{\cot B-\cos ec\, B+1} = \frac{1+\cos B}{\sin B}$

अध्याय 20 दो कोणों के योग और अन्तर तथा उनके अपवर्त्य एवं अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

उद्देश्य

- दो कोणों के योग तथा अन्तर के त्रिकोणमितीय अनुपात के सूत्रों को जान सकेंगे।
- किसी कोण के अपवर्त्य एवं अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात को ज्ञत कर सकेंगे।
- 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0 से पृथक कुछ कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात के मान ज्ञात कर सकेंगे।
- इन सूत्रों के अनुप्रयोगों को समझ सकेंगे।
- वार्तिक प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

शिक्षण बिन्दु

- दो कोणों के योग के त्रिकोणमितीय अनुपात के सूत्र।
- किसी कोणों के अंतर के त्रिकोणमितीय अनुपात के सूत्र।
- किसी कोण के अपवर्त्य एवं अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
- 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0 से पृथक कुछ कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान।
- उपर्युक्त सूत्रों के अनुप्रयोग।

प्रस्तुतीकरण

दो कोणों के योग के त्रिकोणमितीय अनुपात -

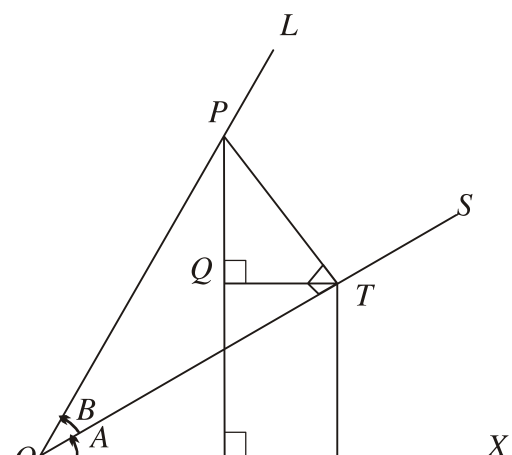
शिक्षक, शिक्षार्थियों को दो कोणों के योग के त्रिकोणमितीय अनुपात के सूत्रों को स्थापित कर दिखायें और उन पर आधारित प्रश्नों को हल करवाएँ।

योग सूत्र का ज्यामितीय निर्धारण

1 $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

2 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

जबकि A, B न्यूनकोण है।



चित्रानुसार $\angle XOS = A,\ \angle SOL = B$ । अतः $\angle XOL = A + B$

रेखा OL पर कोई बिन्दु P लेते हैं और P से OX और OS पर क्रमशः PN तथा PT लम्ब डालते हैं। पुनः T से OX पर TM और PN पर TQ लम्ब डाला।

अतः $\angle QPT = 90^o - \angle PTQ$

$= \angle QTO$ ($\angle QTO$ और $\angle TOM$ एकान्तर कोण हैं।)

$= \angle TOM = A$

अब समकोण $\Delta\, ONP$ में $sin\,(A + B) = sin\,\angle NOP = \dfrac{NP}{OP} = \dfrac{NQ+QP}{OP}$

$$= \frac{NQ}{OP} + \frac{QP}{OP}$$

$$= \frac{MT}{OP} + \frac{QP}{OP} = \frac{MT}{OT}\cdot\frac{OT}{OP} + \frac{QT}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}$$

$sin\,(A + B) = sin\,A\,cos\,B + cos\,A\,sin\,B$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$cos\,(A + B) = cos\,A\ \ cos\,B - sin\,A\ \ sin\,B$

अब $$\tan\left(A+B\right) = \frac{\sin\left(A+B\right)}{\cos\left(A+B\right)}$$

$$= \frac{\sin A\ \cos B + \cos A\ \sin B}{\cos A\ \cos B - \sin A\ \sin B}$$

अंश और हर में $cos\,A\ \ cos\,B$ से भाग देने पर

$$= \frac{\dfrac{\sin A\ \cos B}{\cos A\ \cos B} + \dfrac{\cos A\ \sin B}{\cos A\ \cos B}}{\dfrac{\cos A\ \cos B}{\cos A\ \cos B} - \dfrac{\sin A\ \sin B}{\cos A\ \cos B}}$$

$$\tan\left(A+B\right) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\cot\left(A+B\right) = \frac{\cot A\ \cot B\ - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$sin\ (A + B) = sin\ A\ cos\ B + cos\ A\ sin\ B$$ (सर्वसमिका (1))

$$cos\ (A + B) = cos\ A\ \ cos\ B - sin\ A\ \ sin\ B$$ (सर्वसमिका (2))

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$ (सर्वसमिका (3))

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A\ \cot B\ -1}{\cot A + \cot B}$$ (सर्वसमिका (4))

उदाहरण 1 - $sin\ 47^o\ cos 13^o + cos\ 47^o\ sin\ 13^o$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - माना $47^o = A$ तथा $13^o = B$ तो

दिया गया व्यंजक $= sin\ A\ cos\ B + cos\ A\ sin\ B$

$= sin\ (A + B)\ = sin\ (47^o + 13^\circ)$

$= sin\ 60^o$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण 2 - सिद्ध कीजिए $tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x = tan\ 3x - tan\ 2x - tan\ x$

हल - हम जानते हैं कि

$3x = 2x + x$

$tan\ 3x = tan\ (2x + x)$

$$\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$ (सर्वसमिका (3) से)

अर्थात् $tan\ 3x\ (1 - tan\ 2x\ \ tan\ x) = tan\ 2x + tan\ x$

या $tan\ 3x - tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x\ = tan\ 2x + tan\ x$

या $- tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x\ = - tan\ 3x + tan\ 2x + tan\ x$

या $tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x\ =\ tan\ 3x - tan\ 2x - tan\ x$

इति सिद्धम्।

दो कोणों के अन्तर के त्रिकोणमितीय अनुपात

शिक्षक, शिक्षार्थियों को बताएँ कि योग के सूत्र

$sin\ (A + B) = sin\ A\ cos\ B + cos\ A\ sin\ B$ में B के स्थान पर $- B$ रखने पर कोणों के अन्तर का सूत्र प्राप्त होगा।

$$sin\ (A - B) = sin\ A\ cos\ (-B) + cos\ A\ sin\ (-B)$$

कक्षा 9 में शिक्षार्थी जान चुके हैं कि

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$\sin(A-B) = \sin A \cos B + \cos A(-\sin B)$

$$\boldsymbol{\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B} \qquad (5)$$

इसी प्रकार अन्य सूत्रों को भी स्थापित कर सकते हैं।

$$\boldsymbol{\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B} \qquad (6)$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B} \qquad (7)$$

$$\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A} \qquad (8)$$

उदाहरण 3 - सिद्ध कीजिए $\sin(n+1)x \sin(n+2)x + \cos(n+1)x \cos(n+2)x = \cos x$

हल - माना $(n+2)x = A, \quad (n+1)x = B$

अतः बाँया पक्ष $= \sin(n+1)x \sin(n+2)x + \cos(n+1)x \cos(n+2)x$

$= \cos A \sin B + \sin A \cos B$

$= \cos(A - B)$ (सर्वसमिका (6) के प्रयोग से।)

$= \cos[(n+2)x - (n+1)x]$

$= \cos[nx + 2x - nx - x]$

$= \cos x =$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्।

किसी कोण के अपवर्त्य एवं अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

शिक्षक, शिक्षार्थियों को किसी कोण के अपवर्त्य एवं अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात को सूत्र के माध्यम से बताएँ और उनसे सम्बन्धित प्रश्नों को हल करवाएँ।

कोण 2 A के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपात के पदों में ज्ञात करना।

1. $\sin 2A$ को कोण A के अनुपातों को कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात के पदों में ज्ञात करना :

सूत्र $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ में $A = B$ रखने पर

$\sin(A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$

अर्थात् $\boldsymbol{\sin 2A = 2 \sin A \cos A}$

पुनः $\sin 2A = \frac{2\sin A\cos A}{1}$

$\sin 2A = \frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A}$ (सर्वसमिका $sin^2 A + cos^2 A = 1$ के प्रयोग से)

अंश और हर में $cos^2 A$ से भाग करने पर

$$\sin 2A = \frac{\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{2\tan A}{\tan^2 A+1}$$

या $\sin 2A = \frac{2\tan A}{\tan^2 A+1}$

अतः $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (9)

$cos\ 2A$ को कोण A के अनुपातों के पदों में ज्ञात करना

हम जानते हैं कि

$cos\ (A + B) = cos\ A\ cos\ B - sin\ A\ sin\ B$

$B = A$ रखने पर

$cos\ (A + A) = cos\ A\ cos\ A - sin\ A\ sin\ A$

या $cos\ 2A = cos^2 A - sin^2 A$

या $= cos^2 A - (1 - cos^2 A)$ (सर्वसमिका $cos^2 A + sin^2 A = 1$ के प्रयोग से)

या $\boldsymbol{cos\ 2A = 2cos^2 A - 1}$

पुनः $cos\ 2\ A = cos^2 A - sin^2 A$

$= (1 - sin^2 A) - sin^2 A$ ($cos^2 A + sin^2 A = 1$ के प्रयोग से)

या $\boldsymbol{cos\ 2\ A = 1 - 2sin^2 A}$

पुनः $cos\ 2\ A = cos^2 A - sin^2 A$

$$= \frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{1}$$

या $\quad cos^2 A = \dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A} \quad [\because \cos^2 A + \sin^2 A = 1]$

अंश और हर में $cos^2 A$ से भाग करने पर

$$\cos 2A = \frac{\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A} - \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + \dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{1 - \tan^2 A}{\tan^2 A + 1}$$

या $\quad \cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{\tan^2 A + 1}$

अर्थात् $\quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{\tan^2 A + 1}$$

tan 2 A को कोण *A* के अनुपातों के पदों में ज्ञात करना

सूत्र $\quad \tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ में

$B = A$ रखने पर

$$\tan(A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$

या $\quad \tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

उदाहरण 4 - यदि $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ तो $cos2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - दिया है $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$

सूत्र $cos2\theta = 1 - 2sin^2 \theta$ के प्रयोग से

$$= 1 - 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 1 - 2 \times \frac{16}{25} = 1 - \frac{32}{25}$$

या $\quad cos2\,\theta = \dfrac{25-32}{25} \quad = -\dfrac{7}{25}$

अतः $\quad \cos 2\theta = -\dfrac{7}{25}$

उदाहरण 5 - यदि $\cos A = \dfrac{1}{2}$ तो $\tan 2A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - दिया है $\cos A = \dfrac{1}{2}$

सर्वसमिका $sin^2 A + cos^2 A = 1$ के प्रयोग से

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} \quad = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{4}} \quad = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

अतः $\quad \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

अतः $\quad \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

सूत्र $\quad \tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ से

$$= \frac{2\times\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} \quad = \frac{2\sqrt{3}}{1-3}$$

या $\quad \tan 2A = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

अतः $\quad \tan 2A = -\sqrt{3}$

ख. कोण $\dfrac{A}{2}$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपात के पदों में ज्ञात करना।

हम जानते हैं कि

$sin\ 2A = 2sin\ A\ cos\ A$

$A = \frac{A}{2}$ रखने पर

$\sin 2.\frac{A}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

पुनः सर्वसमिका $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ में

$A = \frac{A}{2}$ रखने पर

$$\sin 2.\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

या $$\sin A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

अतः $$\mathbf{\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}}$$

इसी प्रकार हम ज्ञात कर सकते हैं कि

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2} = 2\cos^2\frac{A}{2}-1 = 1-2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

शिक्षक, शिक्षार्थियों को $\sin\frac{A}{2}$ और $\cos\frac{A}{2}$ के मान को $\cos A$ के पदों में ज्ञात करने की विधि भी बतायें।

इस हेतु सूत्र $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$ से

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \cos A + 1$$

या $$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos A + 1}{2}$$

या $$\mathbf{\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}}$$

इसी प्रकार हम ज्ञात कर सकते हैं कि

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

उदाहरण 6- यदि $\cos A = \frac{1}{3}$ तो $\cos\frac{A}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए

सूत्र $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ के प्रयोग से

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}} \qquad = \pm\sqrt{\frac{3+1}{2\times 3}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{4}{6}} \qquad \therefore \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ग. कोण *(3A)* के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण *A* के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में ज्ञात करना।

sin 3A को *sin A* के पदों में ज्ञात करना।

$\sin 3A = \sin(2A + A)$

$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$ (सर्वसमिका *1* के प्रयोग से)

$= 2\sin A \cos A \cos A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A$

(सूत्र $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ के प्रयोग से)

$= 2\sin A\cos^2 A + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2 \sin^3 A$ $\qquad (\cos^2 A + \sin^2 A = 1)$

$= 2 \sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2 \sin^3 A$

अतः $\quad$ ***Sin 3 A = 3 sin A – 4sin³A***

इसी प्रकार हम $\cos 3A$ को $\cos A$ के पदों में ज्ञात कर सकते हैं।

$$\boldsymbol{\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A}$$

$\tan 3A$ को $\tan A$ के पदों में ज्ञात करना

$$\tan 3A = \tan (2A + A)$$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A} \qquad \text{(सर्वसमिका 3 के प्रयोग से)}$$

$$= \frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A}$$

$$= \frac{2\tan A + \tan A(1-\tan^2 A)}{(1-\tan^2 A) - 2\tan^2 A} = \frac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

अतः $\quad \tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ से पृथक कुछ कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान

शिक्षक, शिक्षार्थियों को बतायें कि उपरोक्त सूत्रों का प्रयोग कर $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ आदि से पृथक कुछ कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 7 - $\sin 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान बताइए।

हल - $\sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$

$A = 45^o$ $\qquad$ तथा $\dfrac{A}{2} = \dfrac{45^\circ}{2} = 22\dfrac{1^\circ}{2}$

$$\sin 22\frac{1^\circ}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$$

चूँकि $\sin 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान धनात्मक होता है। अतः

$$\sin 22\frac{1^\circ}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}}$$

अतः $\sin 22\frac{1^\circ}{2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

उदाहरण - $\sin 18^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए

हल - माना $\theta = 18^\circ$ तो $5\theta = 90^\circ$

$$2\theta + 3\theta = 90^\circ$$

$$2\theta = 90^\circ - 3\theta$$

या $\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta$

या $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

या $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3)$

या $2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$ $(\because \cos\theta \neq 0)$

या $2\sin\theta = 4(1-\sin^2\theta) - 3$

या $2\sin\theta = 4 - 4\sin^2\theta - 3$

या $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

अतः $\sin\theta = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2\times 4}$ (श्रीधराचार्य के सूत्र से)

या $\sin\theta = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

या $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ या $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

चूँकि 18^0 प्रथम चतुर्थांश का कोण है अतः $\sin 18^\circ$ का मान सदैव धनात्मक होगा।

अतः $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

उदाहरण 8 - $\tan 75^o$ का मान ज्ञात कीजिए

हल - $\tan 75^o = \tan (45^o + 30^o) = \dfrac{\tan 45^o + \tan 30^o}{1 - \tan 45^o \tan 30^o}$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)\,(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\,(\sqrt{3}+1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}$$

$$= \frac{3+1+2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

अतः $\tan 75^o = 2+\sqrt{3}$

उपर्युक्त सूत्रों के अनुप्रयोग

शिक्षक, शिक्षार्थियों को बतायें कि उपरोक्त सूत्रों का प्रयोग कर कुछ अन्य महत्वपूर्ण सूत्रों को भी प्राप्त कर सकते हैं।

$$\sin (A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\cos (A + B) \cos (A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B$$

प्रथम सूत्र का निर्धारण

हम जानते हैं कि $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ .... (1)

$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ .... (2)

समी0 (1) को समीकरण (2) से गुणा करने पर

$$\sin (A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 B$$

मूल्यांकन

- $\sin 15^o$ का मान ज्ञात कीजिए (उत्तर $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$)

- यदि $\cos A=\frac{4}{5}$, $\sin B=\frac{5}{13}$ तो $\cos(A+B)$ का मान ज्ञात कीजिए $\left(\text{उत्तर} = \frac{33}{65}\right)$
- सिद्ध कीजिए कि

$$\sin(A+B)\sin(A-B)+\sin(B+C)\sin(B-C)+\sin(C+A)\sin(C-A)=0$$

- यदि $\tan A=\frac{5}{6}$ और $\tan B=\frac{1}{11}$ तो $(A+B)$ का मान ज्ञात कीजिए। *(उत्तर $A+B=45^o$)*
- $\tan\frac{\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए *(उत्तर = $\sqrt{2}-1$)*

अध्याय 21 : sine और cosine के योग और अन्तर को उनके गुणनफल के रूप में व्यक्त करना

उद्देश्य

- *sine* और *cosine* के योग और अन्तर को उनके गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकेंगे।
- इन सूत्रों के अनुप्रयोगो को समझ सकेंगे।
- वार्तिक प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

शिक्षण बिन्दु

- कोणों के *sine* और *cosine* के गुणनफल को उनके योग रूप में व्यक्त करना।
- कोणों के *sine (*या *cosine)* के योग और अन्तर को गुणनफल के रूप में व्यक्त करना।
- उपर्युक्त सूत्रों के अनुप्रयोग।

प्रस्तुतीकरण

कोणों के *sine* और *cosine* के गुणनफल को उनके योग रूप में व्यक्त करना

पिछले अध्याय में हम पढ़ चुके हैं कि

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

अर्थात् $\mathbf{2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)}$

समीकरण 1 और 2 को घटाने पर

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

अर्थात् $\mathbf{2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)}$

पुनः हम जानते हैं कि

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

समीकरण 5 और 6 को जोड़ने पर

$$cos\,(A+B) + cos\,(A-B) = 2\,cos\,A\,cos\,B \;\ldots\ldots\quad 7$$

अर्थात् $\mathbf{2cos\,A\,cos\,B = cos\,(A+B) + cos\,(A-B)}$

समीकरण 5 और 6 को घटाने पर

$$cos\,(A+B) - cos\,(A-B) = -2sin\,A\,sin\,B \;\ldots\ldots\quad 4$$

अर्थात् $\mathbf{2sin\,A\,sin\,B = cos\,(A-B) - cos\,(A-B)}$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{2sin\,A\,cos\,B} &= \mathbf{sin\,(A+B) + sin\,(A-B)} \\ \mathbf{2cos\,A\,sin\,B} &= \mathbf{sin\,(A+B) - sin\,(A-B)} \\ \mathbf{2cos\,A\,cos\,B} &= \mathbf{cos\,(A+B) + cos\,(A-B)} \\ \mathbf{2sin\,A\,sin\,B} &= \mathbf{cos\,(A-B) - cos\,(A-B)} \end{aligned}}$$

उदाहरण 1 - $sin\,105^o\,sin\,75^o$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - $\sin 105^o \sin 75^o = \frac{1}{2}[2\sin 105^o \sin 75^o]$

$$= \frac{1}{2}[\cos(105^o - 75^o) - \cos 105^o + 75^o] \qquad [\because 2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 30^o - \cos 180^o]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1)\right] \qquad \left[\because \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 180^o = -1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right] \qquad = \qquad \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{4}$$

उदाहरण 2 - सिद्ध कीजिए $\sin 20^o \sin 40^o \sin 60^o \sin 80^o = \frac{3}{16}$

हल - बाँया पक्ष $= \sin 20^o \sin 40^o \sin 60^o \sin 80^o$

$= \sin 20^\circ \sin 40^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 80^\circ$ $\left(\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 20^\circ \sin 40^\circ \;\; \sin 80^\circ)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}[\,(2\sin 80^\circ \sin 40^\circ)\sin 20^\circ)]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}[\,(\cos 80^\circ - 40^\circ) - (\cos 80^\circ + 40^\circ)\sin 20^\circ)]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}[\,(\cos 40^\circ - \cos 120^\circ)\;\sin 20^\circ]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(\cos 40^\circ - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\sin 20^\circ\right]$ $\left(\because \cos 120^\circ = \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\right)\sin 20^\circ\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos 40^\circ \sin 20^\circ + \frac{1}{2}\sin 20^\circ\right) \quad = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{2\cos 40^\circ \sin 20^\circ + \sin 20^\circ}{2}\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}(2\cos 40^\circ \sin 20^\circ + \sin 20^\circ)$

(समीकरण 4 के प्रयोग से)

$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\{\sin(40^\circ + 20^\circ) - \sin(40^\circ - 20^\circ) + \sin 20^\circ\}]$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\{\sin 60^\circ - \sin 20^\circ + \sin 20^\circ\}]$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60^\circ \quad = \frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{3}{16}$ दायाँ पक्ष

कोणों के *sine* या *cosine* के योग और अन्तर को गुणनफल के रूप में व्यक्त करना

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ .... (1)

$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ .... (2)

समीकरण (1) तथा समीकरण (2) को जोड़ने पर

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

इस समीकरण में $A + B = C$ और $A - B = D$

अर्थात् $A = \frac{1}{2}(C+D)$ और $B = \frac{1}{2}(C-D)$ रखने पर

$$\boxed{\mathbf{\sin C + \sin D = 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}}}$$

समीकरण (1) तथा समीकरण (2) घटाने पर :

$$= \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

इस समीकरण में $A + B = C$ और $A - B = D$

अर्थात् $A = \frac{1}{2}(C+D)$ और $B = \frac{1}{2}(C-D)$ रखने पर

$$\mathbf{\sin C - \sin D = 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}}$$

इसी प्रकार पूर्ववत् अध्याय से यह ज्ञात है कि :

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$$

इस समीकरण में $A + B = C$ और $A - B = D$

अर्थात् $A = \frac{1}{2}(C+D)$ और $B = \frac{1}{2}(C-D)$ रखने पर

$$\boxed{\mathbf{\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)}}$$

इसी प्रकार

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \sin B$$

इस समीकरण में $A + B = C$ और $A - B = D$

अर्थात् $A = \frac{1}{2}(C+D)$ और $B = \frac{1}{2}(C-D)$ रखने पर

$$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{\cos C - \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{D-C}{2}\right)}}$$

मूल्यांकन

1. सिद्ध कीजिए $\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x = 4\cos^2 x \sin 4x$

2. निम्नलिखित गुणनफलों को योग और अन्तर के रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) $2\sin 13A \cos 3A$ (उत्तर - $\sin 16A + \sin 10A$)

   (ii) $2\sin 50^o \cos 60^o$ (उत्तर - $\sin 110^o - \sin 10^o$)

3. सिद्ध कीजिए

$$\cos 20^o \cos 40^o \cos 60^o \cos 80^o = \frac{1}{16}$$

4. निम्न योग और अन्तर को *sine* और *cosine* के गुणनफल के रूप में प्रकट कीजिए।

   (i) $\cos 12\theta + \cos 8\theta$ (उत्तर - $2\cos 10\theta \cos 2\theta$)

   (ii) $\sin 12\theta - \sin\theta$ (उत्तर - $2\cos 8\theta \cos 4\theta$)

मूल्यांकन

1. सिद्ध कीजिए $\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x = 4\cos^2 x \sin 4x$

2. निम्नलिखित गुणनफलों को योग और अन्तर के रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) $2\sin 13A \cos 3A$ (उत्तर - $\sin 16A + \sin 10A$)

   (ii) $2\sin 50^o \cos 60^o$ (उत्तर - $\sin 110^o - \sin 10^o$)

3. सिद्ध कीजिए

$$\cos 20^o \cos 40^o \cos 60^o \cos 80^o = \frac{1}{16}$$

4. निम्न योग और अन्तर को *sine* और *cosine* के गुणनफल के रूप में प्रकट कीजिए।

   (i) $\cos 12\theta + \cos 8\theta$ (उत्तर - $2\cos 10\theta \cos 2\theta$)

   (ii) $\sin 12\theta - \sin\theta$ (उत्तर - $2\cos 8\theta \cos 4\theta$)

अध्याय 22. ऊँचाई एवं दूरी

उद्देश्य

➲ त्रिकोणमितीय सारणियों को पढ़ सकेंगे।

➲ त्रिकोणमितीय सारणियों एवं लघुगणक सारणियों के प्रयोग से ऊँचाई एवं दूरी के साधारण प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

शिक्षण बिन्दु

☞ त्रिकोणमितीय सारणियों को पढ़ना

☞ त्रिकोणमितीय एवं लघुगणक सारणियों के प्रयोग से ऊँचाई एवं दूरी के साधारण प्रश्नों का हल।

प्रस्तुतीकरण

त्रिकोणमितीय सारणियों को पढ़नाः

आपने कक्षा में ऊँचाई और दूरी से सम्बन्धित अनेक प्रश्न हल किये होंगे। वहाँ आपने केवल 30^0 45^0 एवं 60^0 के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों की सहायता ली होगी। परन्तु वास्तविक एवं व्यावहारिक समस्याओं में हमें इनके अतिरिक्त 0^0 से 90^0 के बीच के किसी भी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान की आवश्यकता होती है। इनके मान ज्ञात करने के लिए त्रिकोणमितीय सारणियों का उपयोग किया जाता है जो प्रायः गणित और विज्ञान की पुस्तकों के अन्त में दी होती हैं। इन सारणियों को पढ़कर किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात के मान को ज्ञात कर सकते हैं।

त्रिकोणमितीय सारणी के एक भाग *(40^0 से 45^0)* का प्रारूप इस अध्याय के अन्त में संलग्न है। इसे दिखाकर शिक्षार्थियों को स्पष्ट करें कि त्रिकोणमितीय सारणी में निम्नलिखित बातें विद्यमान हैं -

1. इस सारणी में क्षैतिज एवं ऊर्ध्व स्तम्भ होते हैं।
2. ऊर्ध्वाधर स्तम्भों में बायीं एवं दायीं ओर के प्रथम तीन स्तम्भ कोण को दर्शाते हैं। बायीं ओर के इन तीन स्तम्भों में पहला स्तम्भ अंश को दशमांश में, दूसरा अंश तथा तीसरा स्तम्भ मिनट को प्रदर्शित करता है। दायीं ओर से पहला स्तम्भ अंश को दशमांश में, दूसरा मिनट तथा तीसरा अंश को दर्शाता है। *($1^0 = 60^1$)*
3. बायीं ओर के कोण वाले स्तम्भों में 0^0 से 45^0 तक के कोण आरोही क्रम में अंकित हैं, जकि दायीं ओर

के कोण वाले स्तम्भों में 90^0 से 45^0 तक के कोण अवरोही क्रम में अंकित हैं, जो बायीं ओर स्थित कोण-स्तम्भ में अंकित कोणों के कोटिपूरक हैं। अतः जहाँ बायीं ओर 40^0 अंकित है, उसकी क्षैतिज सीध में दायीं ओर 40^0 का कोटिपूरक $90^0-40^0 = 50^0$ अंकित होगा।

4. सारणी के क्षैतिज स्तम्भों के पहले क्षैतिज स्तम्भ में बायीं ओर से क्रमशः $sin\ \theta, cos\ \theta, tan\ \theta, cosec\ \theta, sec\theta,$ तथा $cot\ \theta$ त्रिकोणमितीय अनुपात लिखे होते हैं तथा अन्तिम क्षैतिज स्तम्भ में बायीं ओर से क्रमशः $cos\ \theta, sin\ \theta, cot\ \theta, sec\theta, cosec\ \theta$ तथा $tan\ \theta$ त्रिकोणमितीय अनुपात लिखे होते हैं।

5. पहले क्षैतिज स्तम्भ से 0^0 से 45^0 तक के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान पढ़ते हैं, जबकि अन्तिम क्षैतिज स्तम्भ से 45^0 से 90^0 तक के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान पढ़ते हैं।

प्रायः पुस्तकों के अन्त में उपर्युक्त वर्णित सारणी के अतिरिक्त एक और त्रिकोणमितीय सारणी दी रहती है जिसमें मिनट 10 के गुणक में दिये रहते हैं, जबकि उपर्युक्त वर्णित सारणी में मिनट 6 के गुणक में होते हैं। शिक्षक, शिक्षार्थियों को स्पष्ट करें कि दोनों सारणियों में उचित सारणी का उपयोग प्रश्न को हल करने में करें।

त्रिकोणमितीय सारणी से किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात के मान को ज्ञात करने के लिए पहले यह देखें कि वह कोण 45^0 से छोटा है या बड़ा है। यदि कोण, 45^0 से छोटा है (मान लीजिए $42^0 20'$) तो वान्छित कोण $42^0 20'$) को कोण के स्तम्भ में देखिए और त्रिकोणमितीय अनुपात (मान लीजिए $cos\ \theta$) को पहले क्षैतिज सतम्भ में देखिए। कोण के सामने क्षैतिज रेखा से दायीं ओर और त्रिकोणमितीय अनुपात के स्तम्भ में नीचे की ओर बढ़िये, जहाँ पर दोनों स्तम्भ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करें, उस खाने में जो मान लिखा होगा, वही $cos\ 42^0 20'$ का मान होगा। यहाँ पर $cos\ 42^0 20'$ मान 0.7392 होगा।

इसी प्रकार यदि 45^0 से बड़े कोण (मान लीजिये $49^0 30'$) के त्रिकोणमितीय अनुपात (मान लीजिए $sin\ \theta$) का मान अर्थात् $sin\ 49^o 30'$ का मान ज्ञात करने के लिए दायीं ओर के कोण स्तम्भ में के सामने बायीं ओर और अन्तिम क्षैतिज खाने के $sin\ \theta$ के स्तम्भ में ऊपर की ओर बढ़ें, जब दोनों स्तम्भों का प्रतिच्छेद खाना प्राप्त हो जाए तो उस खाने में लिखा मान $sin\ 49^o 30'$ का मान होगा। इस प्रकार $sin\ 49^o 30' = 0.7604$ होगा।

उदाहरण 1 - त्रिकोणमितीय सारणियों के उपयोग से का मान ज्ञात कीजिए।

हल - त्रिकोणमितीय सारणी से

$$sec\ 84^o 54' = sec\ 84.9^o = 11.249$$

$$cosec\ 18^o 24' = cosec\ 18.4^o = 3.1681$$

$$sec\ 84^o\ 54' + cosec\ 18^o\ 24' = 11.249 + 3.1681$$

$$= 14.4171$$ उत्तर

उदाहरण 2 - त्रिकोणमितीय सारणी की सहायता से $cos 42^o\ 42' - sin 64^o\ 42'$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल - त्रिकोणमितीय सारणी से

$$cos\ 42^o 20' = 0.7392$$

तथा $sin\ 64^o\ 42' = sin\ 64.7^o = 0.9041$

$cos\ 42^o\ 20' - sin\ 64^o\ 42' = 0.7392 - 0.9041$

$= -0.1649$ उत्तर

त्रिकोणमितीय एवं लघुगणक सारणियों के प्रयोग से ऊँचाई एवं दूरी के साधरण प्रश्नों का हल

निम्नांकित उदाहरणों को देखिए। इनकी सहायता से ऊँचाई एवं दूरी के प्रश्नों को हल करने में त्रिकोणमितीय सारणियों की उपयोगिता को स्पष्ट करें।

उदाहरण 3 - एक मीनार की ऊँचाई 50 मीटर है। मीनार के आधार तल पर स्थित किसी बिन्दु से देखने पर उसकी चोटी का उन्नयन कोण $28^o\ 42'$ है। उस बिन्दु से मीनार की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल - माना कि AB मीनार है, जिसकी ऊँचाई 50 मीटर है। मीनार के आधार तल पर किसी बिन्दु O से देखने पर मीनार की चोटी B का उन्नयन कोण $28^o42'$ है। अर्थात् $\angle BOA = 28^o42'$ माना कि दूरी $OA = x$ मीटर है।

समकोण $\Delta\ BOA$ में

$$\tan \angle BOA = \frac{AB}{OA}$$

या $$\tan 28^o42' = \frac{50}{x}$$

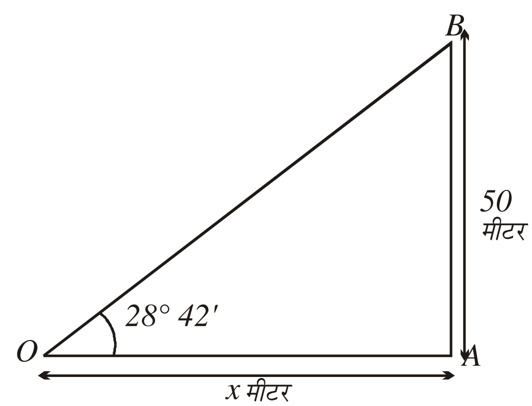
या $$x \tan 28^o42' = 50$$

या $$x = \frac{50}{\tan 28^o42'}$$

$$= 50 \cot 28^o42' \text{ (सारिणी से)}$$

$$= 50 \times 1.8265$$

$= 91.3250$ मीटर



अतः मीनार के आधर से बिन्दु की दूरी 91.325 मीटर है।

उदाहरण 4 - एक स्तम्भ के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण आधार तल के एक बिन्दु से $34^o30'$ है। यदि यह बिन्दु स्तम्भ के आधार से 10 मीटर की दूरी पर है, तो स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल - माना कि स्तम्भ की ऊँचाई h मीटर है।

चित्र से समकोण $\Delta\ ABC$ में

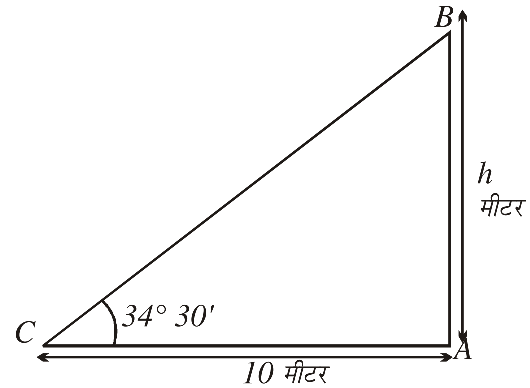
$$\tan 34°30' = \frac{AB}{AC}$$

या $\tan 34°30' = \frac{h}{10}$

या $h = 10 \tan 34°30'$

$= 10 \times .6873$ (सारिणी से)

$= 6.873$ मीटर



उदाहरण 5- एक मकान के आधार से 30 मीटर दूरस्थ एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 50^0 तथा मकान की छत से उसी मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 40^0 है। मकान तथा मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल - AB एक मीनार तथा PQ एक मकान है। मकान और मीनार के बीच की दूरी 30 मी है। मकान के आधार से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 50^0 तथा मकान की छत से उन्नयन कोण 40^0 है।

चित्र से

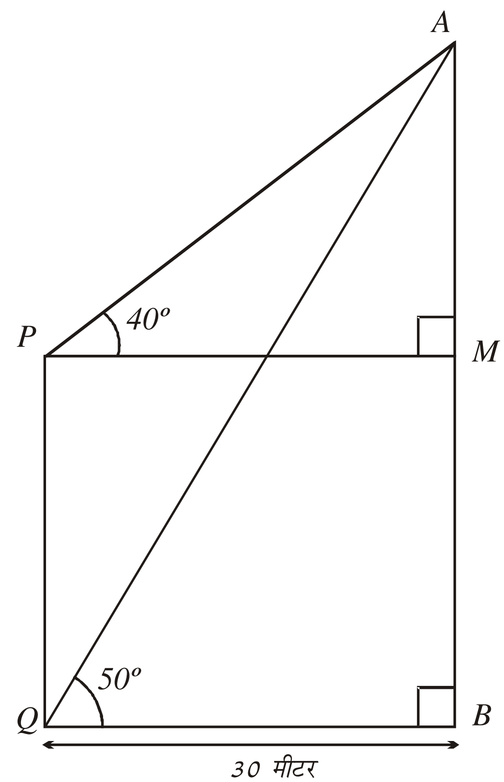
समकोण ΔABQ में

$$\tan 50° = \frac{AB}{QB}$$

या $AB = QB \tan 50°$

$= 30 \times 1.1918$

$= 35.7540$ मीटर



समकोण ΔAMP में

$$\tan 40° = \frac{AM}{PM}$$

या $AM = PM \tan 40°$

$= OB \times \tan 40°$

$= 30 \times 0.8391$ (सारिणी से)

$= 25.1730$ मीटर

मकान की ऊँचाई $PQ = BM$

$= AB - AM$

$= 35.754 - 25.173$

= 10.581 मीटर

अतः मकान की ऊँचाई 10.581 मीटर तथा मीनार की ऊँचाई 35.754 मीटर है।

मूल्यांकन

1. त्रिकोणमितीय सारणी की सहायता से निम्नलिखित त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए -
   - *(i)* $\sin 37^o$
   - *(ii)* $\cos 24^o36'$
   - *(iii)* $\tan 72^o\ 30'$
   - *(iv)* $\text{cosec}\ 75^o\ 42'$

   (उत्तर - 1. 06018; 2. 0.9092; 3. 3.1716; 4. 1.0320)

2. $\tan 35^o36' - \cot 80^o$ का मान ज्ञात कीजिए। (उत्तर 0.3396)

3. एक मीनार क्षैतिज समतल पर ऊर्ध्वाधत खड़ी है। यदि सूर्य का उन्नयन कोण $35^0 41'$ और मीनार की छाया की लम्बाई 50 मीटर हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

   (उत्तर 35.885 मीटर)

4. समुद्र तल से 20 मी ऊँचे एक प्रकाश स्तम्भ के शिखर से एक जहाज के अवनमन कोण की माप है। जहाज की प्रकाश स्तम्भ से दूरी ज्ञात कीजिए। (उत्तर - 39.594 मीटर)

5. 90 मीटर ऊँची मीनार के शिखर से एक मनुष्य एक स्तम्भ को देखता है जिसका पाद मीनार के पाद के क्षैतिज तल पर है। यदि मीनार के शिखर से स्तम्भ के शिखर एवं पाद के अवनमन कोण क्रमशः 22.5^0 तथा 45^0 हो, तो सतम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (उत्तर : 52.722 मीटर)

सारणी (क्रमशः)

θ deg	deg	min	sin θ	cos θ	tan θ	cosec θ	sec θ	cot θ	deg	min	θ deg
40	40	0	0.6428	0.7660	0.8391	1.5557	1.3054	1.1918	50	0	50.0
40.1	40	6	0.6441	0.7649	0.8421	1.5525	1.3073	1.1875	49	54	49.9
40.2	40	12	0.6455	0.7638	0.8451	1.5493	1.3092	1.1833	49	48	49.8
40.3	40	18	0.6468	0.7627	0.8481	1.5461	1.3112	1.1792	49	42	49.7
40.4	40	24	0.6481	0.7615	0.8511	1.5429	1.3131	1.1750	49	36	49.6
40.5	40	30	0.6494	0.7604	0.8541	1.5398	1.3151	1.1708	49	30	49.5
40.6	40	36	0.6508	0.7593	0.8571	1.5366	1.3171	1.1667	49	24	49.4
40.7	40	42	0.6521	0.7581	0.8601	1.5335	1.3190	1.1626	49	18	49.3
40.8	40	48	0.6534	0.7570	0.8632	1.5304	1.3210	1.1585	49	12	49.2
40.9	40	54	0.6547	0.7559	0.8662	1.5273	1.3230	1.1544	49	6	49.1
41	41	0	0.6561	0.7547	0.8693	1.5243	1.3250	1.1504	49	0	49.0
41.1	41	6	0.6574	0.7536	0.8724	1.5212	1.3270	1.1463	48	54	48.9
41.2	41	12	0.6587	0.7524	0.8754	1.5182	1.3291	1.1423	48	48	48.8

41.3	41	18	0.6600	0.7513	0.8785	1.5151	1.3311	1.1383	48	42	48.7
41.4	41	24	0.6613	0.7501	0.8816	1.5121	1.3331	1.1343	48	36	48.6
41.5	41	30	0.6626	0.7490	0.8847	1.5092	1.3352	1.1303	48	30	48.5
41.6	41	36	0.6639	0.7478	0.8878	1.5062	1.3373	1.1263	48	24	48.4
41.7	41	42	0.6652	0.7466	0.8910	1.5032	1.3393	1.1224	48	18	48.3
41.8	41	48	0.6665	0.7455	0.8941	1.5003	1.3414	1.1184	48	12	48.2
41.9	41	54	0.6678	0.7443	0.8972	1.4974	1.3435	1.1145	48	6	48.1
42	42	0	0.6691	0.7431	0.9004	1.4945	1.3456	1.1106	48	0	48.0
42.1	42	6	0.6704	0.7420	0.9036	1.4916	1.3478	1.1067	47	54	47.9
42.2	42	12	0.6717	0.7408	0.9067	1.4887	1.3499	1.1028	47	48	47.8
42.3	42	18	0.6730	0.7396	0.9099	1.4859	1.3520	1.0990	47	42	47.7
42.4	42	24	0.6743	0.7385	0.9131	1.4830	1.3542	1.0951	47	36	47.6
42.5	42	30	0.6756	0.7373	0.9163	1.4802	1.3563	1.0913	47	30	47.5
42.6	42	36	0.6769	0.7361	0.9195	1.4774	1.3585	1.0875	47	24	47.4
42.7	42	42	0.6782	0.7349	0.9228	1.4746	1.3607	1.0837	47	18	47.3
42.8	42	48	0.6794	0.7337	0.9260	1.4718	1.3629	1.0799	47	12	47.2
42.9	42	54	0.6804	0.7325	0.9293	1.4690	1.3651	1.0761	47	6	47.1
43	43	0	0.6820	0.7314	0.9325	1.4663	1.3673	1.0724	47	0	47.0
43.1	43	6	0.6833	0.7302	0.9358	1.4635	1.3696	1.0686	46	54	46.9
43.2	43	12	0.6845	0.7290	0.9391	1.4608	1.3718	1.0649	46	48	46.8
43.3	43	18	0.6858	0.7278	0.9424	1.4581	1.3741	1.0612	46	42	46.7
43.4	43	24	0.6871	0.7266	0.9457	1.4554	1.3763	1.0575	46	36	46.6
43.5	43	30	0.6884	0.7254	0.9490	1.4527	1.3786	1.0538	46	30	46.5
43.6	43	36	0.6896	0.7242	0.9523	1.4501	1.3809	1.0501	46	24	46.4
43.7	43	42	0.6909	0.7230	0.9556	1.4474	1.3832	1.0464	46	18	46.3
43.8	43	48	0.6921	0.7218	0.9590	1.4448	1.3855	1.0428	46	12	46.2
43.9	43	54	0.6934	0.7206	0.9623	1.4422	1.3878	1.0392	46	6	46.1
44	44	0	0.6947	0.7193	0.9657	1.4396	1.3902	1.0355	46	0	46.0
44.1	44	6	0.6959	0.7181	0.9691	1.4370	1.3925	1.0319	45	54	45.9
44.2	44	12	0.6972	0.7169	0.9725	1.4344	1.3949	1.0283	45	48	45.8
44.3	44	18	0.6984	0.7157	0.9759	1.4318	1.3972	1.0247	45	42	45.7
44.4	44	24	0.6997	0.7145	0.9793	1.4293	1.3996	1.0212	45	36	45.6
44.5	44	30	0.7009	0.7133	0.9827	1.4267	1.4020	1.0176	45	30	45.5
44.6	44	36	0.7022	0.7120	0.9861	1.4242	1.4044	1.0141	45	24	45.4
44.7	44	42	0.7034	0.7108	0.9896	1.4217	1.4069	1.0105	45	18	45.3
44.8	44	48	0.7046	0.7096	0.9930	1.4192	1.4093	1.0070	45	12	45.2
44.9	44	54	0.7059	0.7083	0.9965	1.4167	1.4118	1.0035	45	6	45.1
45	45	0	0.7071	0.7071	1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	45	0	45.0
θ deg	deg	min	sin θ	cos θ	tan θ	cosec θ	sec θ	cot θ	deg	min	θ deg

इकाई 9 - ज्यामिति

अध्याय 23. वृत्त

उद्देश्य

➲ वृत्त एवं वृत्त से सम्बन्धित विभिन्न अवयवों का अध्ययन कर सकेंगे।

➲ वृत्त से सम्बन्धित विभिन्न प्रमेयों का अध्ययन करेंगे।

शिक्षण बिन्दु -

☞ वृत्त, केन्द्र, परिधि, त्रिज्या, जीवा।

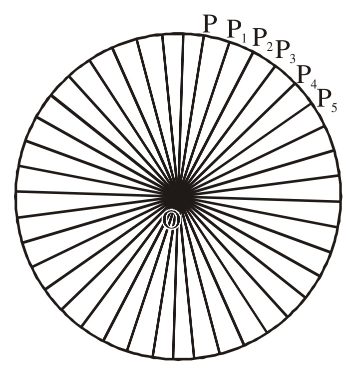
☞ वृत्त खण्ड, छेदक रेखा, त्रिज्य खण्ड, केन्द्र रेखा संकेन्द्रीय वृत्त, उभयनिष्ठ जीवा, चाप, एवं चाप की लम्बाई।

☞ सर्वांगसम चाप, सर्वांगसम वृत्त,वृत्त की परिधि एवं व्यास में सम्बन्ध।

☞ वृत्त सम्बन्धी कतिपय प्रमेयों का कथन एवं सत्यापन।

प्रस्तुतीकरण -

वृत्त (Circle) -

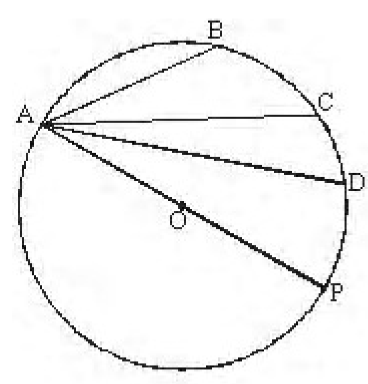


वृत्त एक ही तल में स्थित P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5...... उन असंख्य बिन्दुओं का समूह *(समुच्चय)* हैं जो एक नियत बिन्दु से समान दूरी पर स्थित हों।

वृत्त में यह नियत बिन्दु O, वृत्त का केन्द्र कहलाता है तथा समान दूरी त्रिज्या कहलाती है।

(यहाँ पर लम्बाइयाँ $OP_1 = OP_2 = OP_3 = ... =$ *त्रिज्या)*

रेखाखण्ड की भाँति 'त्रिज्या' दो अर्थों में प्रयुक्त होता है। एक रेखाखण्ड के रूप में तथा दूसरा उसकी लम्बाई।



जीवा (Chord)

किसी वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाली ऋजु रेखा वृत्त की जीवा कहलाती है। चित्र में AB, AC, AD, AP वृत्त की विभिन्न जीवाएँ हैं।

टिप्पणी : किसी वृत्त में समान लम्बाई की अथवा भिन्न भिन्न लम्बाइयों की असंख्य जीवाएँ होती है। वृत्त का कोई भी व्यास अधिकतम लम्बाई की जीवा होती है।

परिधि :

वृत्त को घेरने वाली रेखा के परिमाप को उसकी परिधि कहते हैं।

वृत्त की परिधि एवं व्यास में सम्बन्ध

वृत्त की परिधि और व्यास में एक अचर अनुपात होता है। यह अचर अनुपात सदैव π से निरूपित किया जाता है।

अर्थात् $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

परिधि = व्यास × π

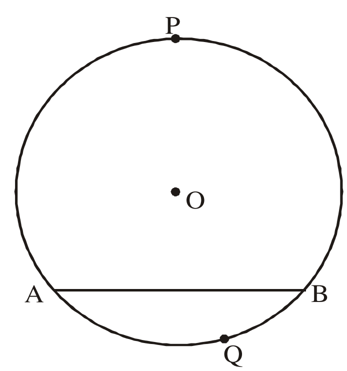
परिधि = 2 π × त्रिज्या

ध्यान दीजिए कि π एक अपरिमेय संख्या है जिसका निकटतम मान 3.14159 है जिसे गणना कार्यों में सरलीकरण के लिए $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 लेते हैं।

वृत्त खण्ड

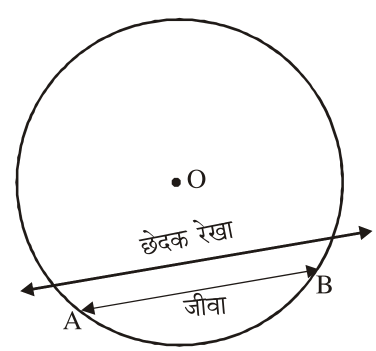
वृत्त की जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करती हैं। प्रत्येक भाग एक वृत्त खण्ड कहलाता है।

संलग्न चित्र में रेखा AB (जीवा) तथा दीर्घचाप APB से घिरा वृत्त खण्ड दीर्घ वृत्त-खण्ड और जीवा तथा लघु-चाप AQB से घिरा वृत्त खण्ड लघुवृत्त-खण्ड हैं।

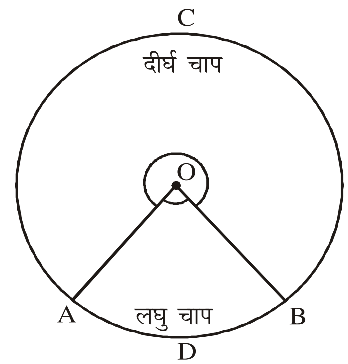


छेदक रेखा

वह रेखा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करे, वृत्त की छेदक रेखा कहलाती है। संलग्न चित्र में रेखा AB एक छेदक रेखा हैं जो कि वृत्त को दो भिन्न बिन्दु A एवं B पर प्रतिच्छेदित करती हैं।



चाप (Arc)

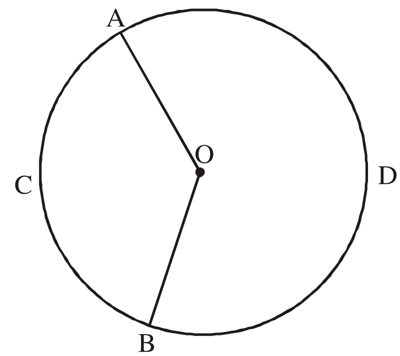


वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच स्थित, वृत्त के भाग को चाप (Arc) कहते हैं। ये दो बिन्दु वृत्त को दो चापों में विभाजित करते हैं। संलग्न चित्र में बिन्दु A एवं B वृत्त के दो चापों ACB तथा ADB में विभक्त करते हैं।

अधिक लम्बाई वाला भाग (ACB) दीर्घ चाप तथा कम लम्बाई वाला भाग (ADB) लघु चाप कहलाता है।

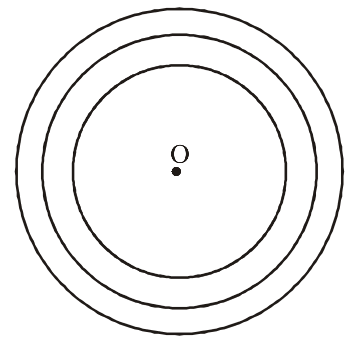
टिप्पणी : यदि बिन्दु A तथा B किसी व्यास के सिरों पर स्थित हों तो दोनों चाप समान लम्बाई के होते हैं, जिन्हें अर्धवृत्त कहते हैं।

त्रिज्य खण्ड (Sector)



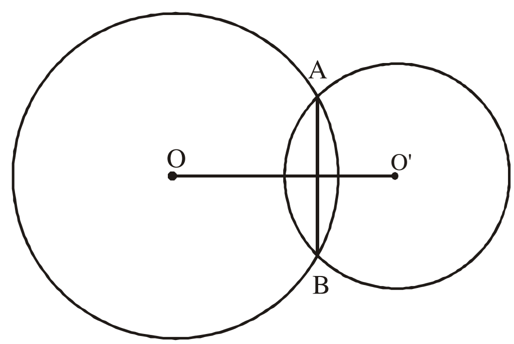
वृत्त की दो त्रिज्याओं तथा एक चाप से घिरी बन्द आकृति एक त्रिज्य-खण्ड कहलाता है। संलग्न चित्र में OACB लघु त्रिज्य-खण्ड (Minor Sector) तथा OADB दीर्घ त्रिज्य-खण्ड (Major Sector) हैं।

संकेन्द्रीय वृत्त



ऐसे सभी वृत्त जिनका केन्द्र समान बिन्दु होता है, तथा त्रिज्याएँ भिन्न-भिन्न होती हैं, उन्हें संकेन्द्रीय वृत्त कहलाते हैं।

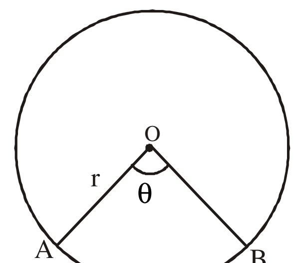
उभयनिष्ठ जीवा



यदि दो वृत्त एक दूसरे को प्रतिच्छेद करें तो प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मिलाने वाली ऋजु रेखा उन वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा कहलाती है।

संलग्न चित्र में AB उभयनिष्ठ जीवा है।

चाप की लम्बाई



माना वृत्त की सम्पूर्ण परिधि p तथा लघु चाप AB की लम्बाई l है।

वृत्त की सम्पूर्ण परिधि केन्द्र पर 360^0 का तथा चाप की लम्बाई केन्द्र पर θ^0 का कोण अन्तरित करती है। चूँकि चाप की लम्बाई उसके द्वारा अन्तरित कोण के समानुपाती

होती हैं। अतः

$$\frac{\theta}{l} = \frac{360}{p} = \text{नियतांक}$$

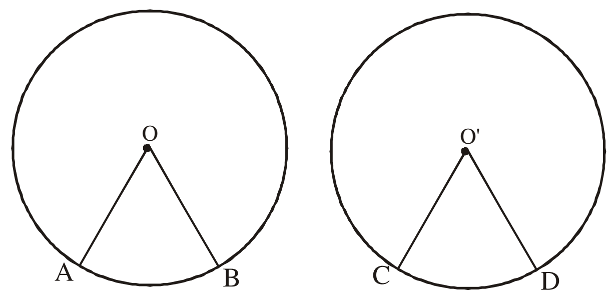
$$l = p \times \frac{\theta}{360}$$

परन्तु $p = 2\pi r$, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

अर्थात् $l = \frac{2\pi r\,\theta}{360}$

$$l = \frac{\pi r}{180} \times \theta$$

सर्वांगसम वृत्त



ऐसे दो या दो से अधिक वृत्त सर्वांगसम होते हैं जब उनकी त्रिज्याओं की माप समान हों।

सर्वांगसम चाप

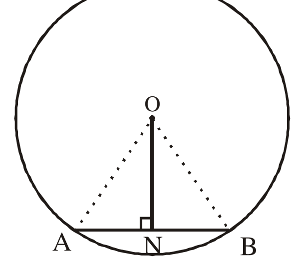
दो सर्वांगसम वृत्तों के ऐसे चाप जिनका अंशमाप समान हों, सर्वांगसम चाप होते हैं।

संलग्न चित्र में लघु चाप AB तथा लघु चाप CD सर्वांगसम हैं इसे $AB \cong CD$ भी लिखा जा सकता हैं।

शिक्षक शिक्षार्थियों से उनकी लेखन पुस्तिका में भिन्न भिन्न त्रिज्याओं के वृत्त खिचवायें और उनमें वृत्त के उपर्युक्त वर्णित भिन्न-भिन्न अवयवों को अंकित करने को कहें तथा उनकी जाँच कर यह देख लें कि शिक्षार्थियों को इनका सम्यक बोध हो गया है। इसके पश्चात वृत्त सम्बन्धी प्रमेयों का ज्ञान इन्हे दें। इस संदर्शिका में दो-तीन प्रमेयों की आदर्श-प्रस्तुति दी जा रही हैं।

शिक्षक शिक्षार्थियों को उपर्युक्त त्रिज्या का एक वृत्त खिंचवाये और उपयुक्त जीवा (जो कि व्यास न हों) पर केन्द्र से लम्ब डालने को कहें तथा देख लें कि केन्द्र से डाला गया लम्ब जीवा को दो बराबर भागों में बाटता हैं या नहीं तत्पश्चात् निम्न प्रमेयों का ज्ञान करायेंगे।

प्रमेय - 1



किसी वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

दिया है : किसी वृत्त का केन्द्र O और AB उसकी एक जीवा हैं। वृत्त के केन्द्र O से जीवा AB पर ON लम्ब खींचा गया है।

सिद्ध करना है : लम्ब ON, जीवा AB को समद्विभाजित करता हैं।

अर्थात् $AN = BN$

रचना : OA तथ OB को मिलाएं।

प्रमाण : रचना द्वारा ΔOAN तथा ΔOBN दो समकोण त्रिभुज बनते हैं क्योंकि $ON \perp AB$

समकोण ΔOAN तथा ΔOBN में

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।)

$ON = ON$

स्पष्ट है कि दोनों समकोण त्रिभुजों में क्रमशः कर्ण (OA तथा OB) और एक भुजा (ON) पृथक-पृथक समान हैं जो दोनों त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की पुष्टि करता है।

$\therefore \Delta OAN \cong \Delta OBN$

$\therefore AN = BN$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

इति सिद्धम

प्रमेय - 2

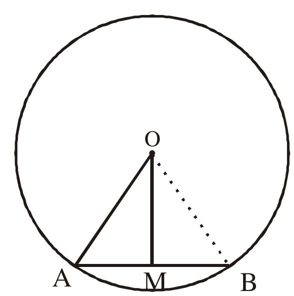
किसी वृत्त का केन्द्र और जीवा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती हैं।

दिया है : किसी वृत्त का केन्द्र O है और AB उसकी जीवा है। जिसका मध्य बिन्दु M है।

सिद्ध करना है : $OM \perp AB$

रचना : केन्द्र O को बिन्दुओं A तथा B से सरल रेखाओं द्वारा मिलाकर त्रिज्याएँ OA तथा OB खींचिए।

प्रमाण : ΔOAM तथा ΔOBM में



$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$AM = MB$ ($\therefore M$ जीवा AB का मध्य बिन्दु है)

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ भुजा)

क्योंकि ΔOAM की तीनों भुजाएँ OA, AM तथा OM, ΔOBM की तीनों संगत भुजाएँ OB, BM तथा OM के बराबर हैं।

$\therefore \Delta OAM \cong \Delta OBM$

$\angle OMA = \angle OMB$ .... (1)

परन्तु $\angle OMA$ और $\angle OMB$ ऋजु रेखा AB के बिन्दु M पर बने हुए हैं।

$\angle OMA + \angle OMB = 180^o$ .... (2)

समीकरण (1) एवं (2) को हल करने पर

$$\angle OMA = \angle OMB = 90^o \quad .... \quad (2)$$

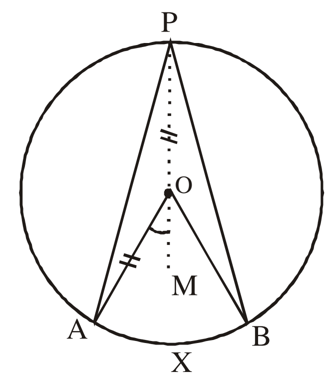
अर्थात् $OM \perp AM$ तथा $OM \perp BM$

परन्तु बिन्दु M रेखा AB पर हैं।

अतः $OM \perp AB$ इति सिद्धम

शिक्षक शिक्षार्थियों से उपयुक्त त्रिज्या का एक वृत्त खिंचवायें तथा वृत्त पर दो बिन्दु लेने को कहें, दोनों बिन्दुओं से लघु चाप AB के द्वारा केन्द्र पर कोण की माप ज्ञात करायें साथ ही दीर्घ चाप के किसी बिन्दु पर लघु चाप AB के द्वारा अन्तरित कोण की माप भी ज्ञात करायेंगे तत्पश्चात यह देख लें कि लघु चाप के द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण की माप, उसी चाप के द्वारा दीर्घ चाप के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण की माप दुगुनी होंगी या नही। इसके पश्चात निम्न प्रमेयों का ज्ञान करायेंगे।

प्रमेय 3



किसी वृत्त के एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दूना होता है।

दिया है : वृत्त $AXBP$ का केन्द्र O है। जिसके चाप AXB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle AOB$ और वृत्त के शेष चाप के किसी बिन्दु P पर अन्तरित $\angle APB$ है।

सिद्ध करना है : $\angle AOB = 2\angle APB$

रचना : $\angle AOB$ और $\angle APB$ में सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए रेखा POM खींचिए।

प्रमाण : चित्रानुसार -

ΔAPO में $OA = OP$ .... *(1)* (एक ही वृत्त के त्रिज्याएँ)

$\angle OAP = \angle OPA$

$\angle AOM = \angle OAP + \angle OPA$ ($\angle AOM$ वहिष्कोण है)

समी0 (1) से

$\angle AOM = 2\angle OPA$ .... *(2)*

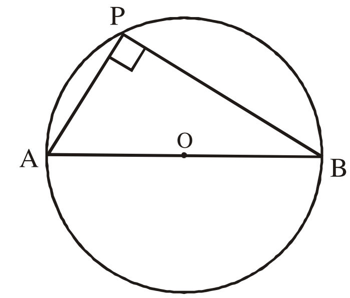
इसी प्रकार $\angle BOM = 2\angle OPB$ .... *(3)*

समीकरण *(2)* एवं *(3)* जोड़ने पर

$$\angle AOM + \angle BOM = 2(\angle OPA + \angle OPM)$$

$\angle AOB = 2\angle APB$ ''इति सिद्धम''

उपप्रमेय -



अर्धवृत्त का कोण समकोण होता हैं।

दिया है : किसी वृत्त का केन्द्र O एवं व्यास AB हैं उसके किसी अर्द्धवृत्त में एक कोण $\angle APB$ हैं।

सिद्ध करना है : $\angle APB = 90^o$

प्रमाण : रेखाखण्ड AB वृत्त का व्यास हैं और वृत्त का केन्द्र O। अतः AOB एक ऋजु रेखा हैं।

$$\angle AOB = 180^o$$

परन्तु $\angle AOB$ वृत्त की अर्द्धपरिधि (चाप) द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण हैं और शेष अर्द्धपरिधि खण्ड में किसी बिन्दु P पर इसके द्वारा अन्तरित कोण $\angle APB$ है।

$\therefore \quad \angle AOB = 2\angle APB$

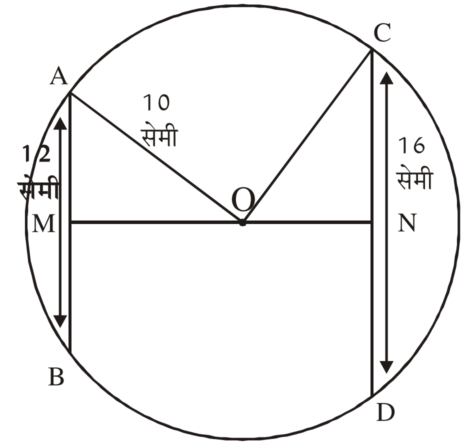
या $\quad \angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$

$$\angle APB = \frac{1}{2}\times 180^o = 90^o$$

$\angle APB = 90^o$ इति सिद्धम

उदाहरण - एक वृत्त की दो समान्तर जीवाओं की माप 12 सेमी और 16 सेमी है। ये केन्द्र के दोनों ओर स्थित हैं। यदि वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी हो तो जीवाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल - केन्द्र O से जीवा AB पर OM और जीवा CD पर DN लम्ब डाला



$OM \perp AB$

$\therefore AM = MB = 6$ सेमी

इसी प्रकार $CN = DN = 8$ सेमी

समकोण ΔOAM में

$OA^2 = OM^2 + AM^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$OM^2 = OA^2 - AM^2$

$= (10)^2 - 6^2$

$= 100 - 36 = 64$

$OM = \sqrt{64}$ सेमी

$OM = 8$ सेमी

इसी प्रकार समकोण $\Delta\ OCN$ में

$$OC^2 = ON^2 + NC^2$$

$$ON^2 = OC^2 - NC^2$$

$$ON^2 = (10)^2 - (8)^2$$

$$= 100 - 64 = 36$$

$$ON = 6 \text{ सेमी}$$

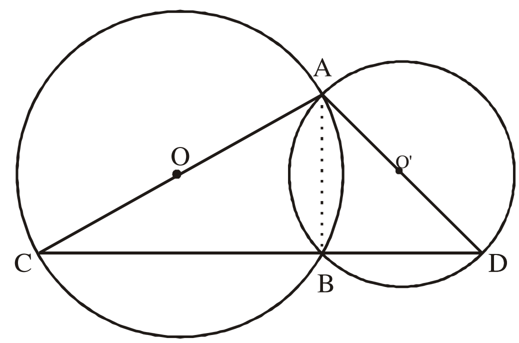
जीवाओं के बीच की दूरी $MN = OM + ON$

$$= 8 + 6 = 14 \text{ सेमी}$$

$MN = 14$ सेमी इति सिद्धम

उदाहरण 2 - दो वृत्त एक दूसरे को A और B पर प्रतिच्छेदित करते हैं और AC तथा AD इन वृत्तों का व्यास है। सिद्ध कीजिए कि C, B, D संरेख हैं।

हल - दिया है



दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं एक दूसरे को A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। AC तथा AD इन वृत्तों के व्यास हैं।

सिद्ध करना है : C, B, D संरेख हैं।

रचना : CB, BD और AB को मिलाया।

प्रमाण : $\angle ABC = 90^o$ (अर्द्धवृत्त का कोण हैं)

$\angle ABD = 90^o$ (अर्द्धवृत्त का कोण हैं)

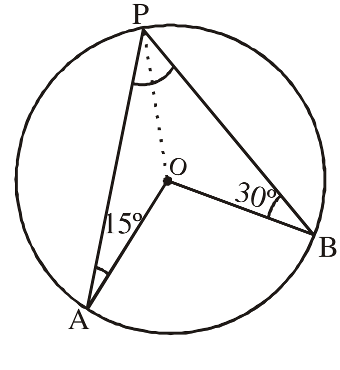
$\angle ABC + \angle ABD = 90^o + 90^o$

$\angle CBD = 180^o$

अर्थात् C, B, D संरेख हैं।

उदाहरण 3 - चित्र में वृत्त PAB का केन्द्र O हैं। यदि $\angle PAO = 15^o$ तथा $\angle PBO = 30^o$ तो $\angle AOB$ की माप ज्ञात कीजिए।

हल - दिया है।



एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। $\angle PAO = 15^o$ तथा

$\angle PBO = 30^o$

ज्ञात करना है : $\angle AOB$ का मान

रचना : O को P से मिलाया।

प्रमाण : ΔOAP में

$OA = OP$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\Delta OPA = \angle OAP = 15^o$ .... (1)

ΔOBP में, $OB = OP$

$\angle OPB = \angle OBP = 30^o$ .... (2)

समीकरण (1) एवं (2) को जोड़ने पर

$\angle OPA + \angle OPB = 15^o + 30^o = 45^o$

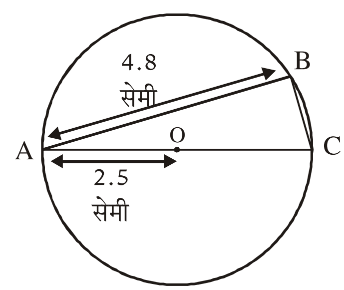
$\therefore \angle APB = 45^o$

$\therefore$ AB चाप से केन्द्र पर $\angle AOB$ और परिधि पर $\angle APB$ बनता है।

$\therefore$ $\angle AOB = 2\angle APB = 2 \times 45^o = 90^o$

$\therefore$ $\angle AOB = 90^o$

उदाहरण 4: पार्श्व चित्र में O वृत्त का केन्द्र हैं, जिसका व्यास AC है, त्रिज्या OA = 2.5 सेमी और $AB = 4.8$ सेमी तो BC की माप ज्ञात कीजिये।



हल - ज्ञात हो $AB = 4.8$ सेमी

$AC = 5.0$ सेमी

ΔABC में $\angle ABC = 90^o$(अर्द्धवृत्त का कोण है।)

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

या$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$= (5)^2 - (4.8)^2$

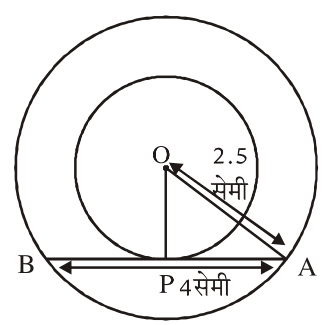
$BC = 25 - 23.04$

$BC = \sqrt{1.96} = 1.4$ सेमी

$BC = 1.4$ सेमी

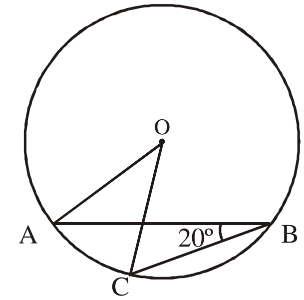
मूल्यांकन

1. दिये गये चित्र में, दो संकेन्द्रीय वृत्त हैं। जिनका केन्द्र O है, AB बाह्य वृत्त की जीवा है। यदि जीवा की माप 4 सेमी तथा बाह्य वृत्त की त्रिज्या 2.5 सेमी तथा जीवा अन्तःवृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है। तो अन्तः वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

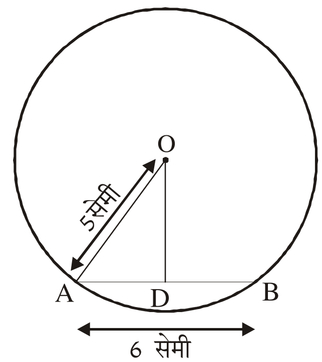


2. दो परस्पर काटने वाले वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 4.2 सेमी है। उनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई 3.2 सेमी तथा उनमें से एक वृत्त की त्रिज्या 3.4 सेमी हैं। दूसरे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

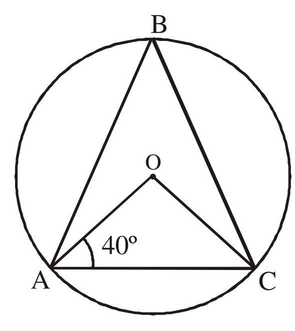
3. चित्र में O एक वृत्त ABC का केन्द्र हैं। यदि $\angle ABC = 20^o$ तो $\angle AOC$ की माप ज्ञात कीजिए।



4. चित्र में O एक वृत्त का केन्द्र हैं, जीवा AB की माप = 6 सेमी और वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है। OD वृत्त के केन्द्र से जीवा AB पर लम्ब है। OD का मान ज्ञात कीजिए।



5. चित्र में वृत्त का केन्द्र O हैं यदि $\angle OAC = 40^o$ तो $\angle ABC$ की माप ज्ञात कीजिए।



उत्तर माला

1. 1.5 सेमी, 2. 2.0 सेमी, 3. 40^0, 4. 4 सेमी, 5. 50^0

अध्याय 24 चक्रीय चतुर्भुज *(Cyclic Quadrilaterals)*

उद्देश्य

➲ चक्रीय चतुर्भुज के निम्नांकित प्रगुणों का बोध कराना-

➲ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं, का ज्ञान कराना।

➲ यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180^0 हो तो चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है, का बोध कराना।

शिक्षण बिन्दु

☛ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं।

☛ यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180^0 हो तो चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है।

प्रस्तुतीकरण

शिक्षक शिक्षार्थियों को ध्यान दिलायें कि वह चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हों, चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है। शिक्षार्थियों से एक चक्रीय चतुर्भुज बनवायें। देखें कि सम्मुख कोणों का योगफल कितना है ? क्या इनका योगफल 180^0 है या नहीं।

इसे इस प्रमेय से स्पष्ट करें।

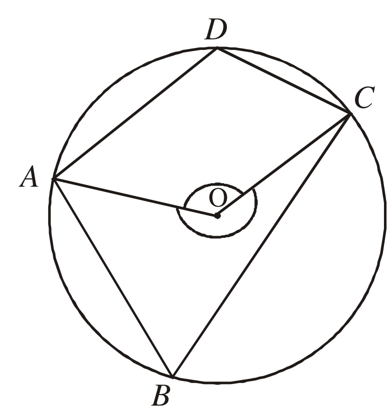
प्रमेय 1

''चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी भी युग्म का योगफल 180^0 होता है।

दिया है - *ABCD* चक्रीय चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है - $\angle ADC + \angle ABC = 180^o$

$\angle BAD + \angle BCD = 180^o$



रचना - वृत्त के केन्द्र O से रेखाखण्ड OA तथा OC खीर्चें

उपपत्ति - चाप ADC केन्द्र O पर न्यून $\angle AOC$ तथा शेष चाप पर $\angle ABC$ बनाता है।

$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$ .... (1)

इसी प्रकार -

चाप ABC केन्द्र पर वृहत $\angle AOC$ तथा शेष चाप पर $\angle ADC$ बनाता है।

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ वृहत $\angle AOC$ .... (2)

समीकरण (1) तथा समीकरण (2) को जोड़ने पर

$\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2}$ ($\angle AOC$ +वृहत AOC)

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$

$= 180^\circ$

अब $\angle A + \angle B + \angle C + D = 360^\circ$

अतः $\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$ यही सिद्ध करना था।

शिक्षक शिक्षार्थियों से एक चक्रीय चतुर्भुज चतुर्भुज बनवायें। देखें कि चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180^0 होने पर चारों शीर्ष वृत्त पर स्थित हैं या नहीं।

इसे निम्न प्रमेय से स्पष्ट करें।

प्रमेय 2

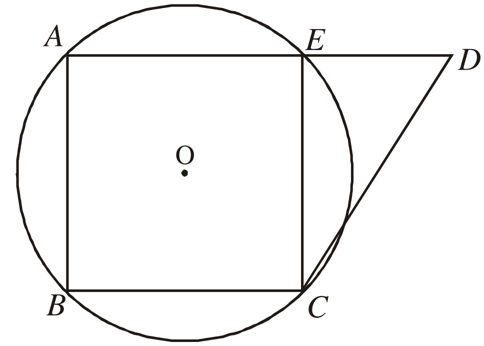
"यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोणों में से किसी भी युग्म का योगफल 180^0 हो तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।"

दिया है - चतुर्भुज ABCD तथा

$\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

सिद्ध करना है - ABCD चक्रीय चतुर्भुज है।



रचना - बिन्दु A, B तथा C से होकर जाता हुआ एक वृत्त खींचे। यदि यह बिन्दु D से होकर नहीं जाता है तो वह रेखा AD को अथवा AD के बढ़े भाग को E पर काटता है। रेखाखण्ड CE खींचे।

उपपत्ति - चतुर्भुज ABCE चक्रीय चतुर्भुज है।

$\angle AEC + \angle CBA = 180^\circ$

परन्तु $\angle CBA + \angle ADC = 180^\circ$

$\therefore \angle AEC + \angle CBA = \angle CBA + \angle DAC$

या $\angle AEC = \angle ADC$

परन्तु यह दोनों दशा में सम्भव नहीं है क्योंकि चित्र (i) में ΔEDC का $\angle AEC$ बहिष्कोण है एवं $\angle EDC$ अन्तः कोण है, तथा चित्र (ii) में ΔEDC का $\angle ADC$ बहिष्कोण एवं $\angle DEC$ अन्तः कोण है, जो परस्पर बराबर नहीं हो सकते।

अतः बिन्दु A, B तथा C से होकर जाने वाला वृत्त बिन्दु D से भी हो कर अवश्य जायेगा।

अर्थात् चतुर्भुज ABCD, चक्रीय चतुर्भुज है। यही सिद्ध करना है।

शिक्षक निम्न प्रमेय भी सिद्ध करें -

⌘ ''किसी चक्रीय चतुर्भुज की किसी भुजा को बढ़ाने पर बना बहिष्कोण अपने अभिमुख अन्तः कोण के समान होता है।''

⌘ ''यदि किसी चतुर्भुज का बहिष्कोण उसके सूदूर अन्तः कोण के समान हो तो वह चक्रीय चतुर्भुज होगा।''

⌘ ''यदि कोई चक्रीय चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज हो तो वह चतुर्भुज आयत होगा।''

उदाहरण 1 - चित्र में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। AB वृत्त का व्यास है।यदि $\angle ADC = 120^\circ$ हो तो $\angle CAB$ की माप ज्ञात कीजिए।

हल - $\therefore \angle ADC = 120^\circ$

$\therefore \angle ABC = 180 - \angle ADC$

$= 180^\circ - 120^\circ$

$= 60^\circ$

$\therefore$ AOB वृत्त का व्यास है

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$

अब ΔABC में

$\therefore \angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$ *(क्यों ?)*

या $\angle CAB + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle CAB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ उत्तर

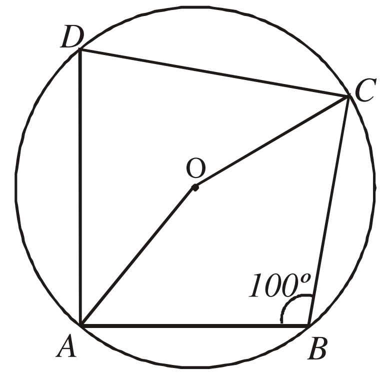
उदाहरण 2 - चित्र में O वृत्त का केन्द्र तथा ABCD चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle ABC = 100^\circ$ तो $\angle AOC$ की माप ज्ञात कीजिए।

हल $\angle B + \angle D = 180^\circ$ *(क्यों ?)*

या $\quad 100^\circ + \angle D = 180^\circ$

$\angle D = 180^\circ - 100^\circ \quad = 80^\circ$

$\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC$



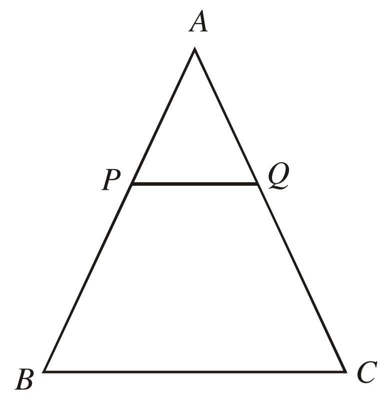
या $80^\circ = \frac{1}{2} \angle AOC$

$\angle AOC = 160^\circ$ उत्तर

उदाहरण 3 - एक समद्विबाहु त्रिभुज के आधार के समान्तर शेष भुजाओं को काटती हुई कोई रेखा खींची गयी है। सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बना चतुर्भुज एक चक्रीय चतुर्भुज है।

दिया है - समद्विबाहु ΔABC जिसमें $AB = AC$, आधार BC के समान्तर रेखा PQ जो AB तथा AC को P तथा Q पर काटती है।

सिद्ध करना है - चतुर्भुज BCQP एक चक्रीय चतुर्भुज है।



उपपत्ति - $\therefore PQ \parallel BC$ तथा PB इन्हें काटती है।

$\therefore \angle BPQ + \angle PBC = 180^\circ$

परन्तु $\angle PBC = \angle BCQ \quad (\because AB = AC)$

$\therefore \angle BPQ + \angle BCQ = 180^\circ$

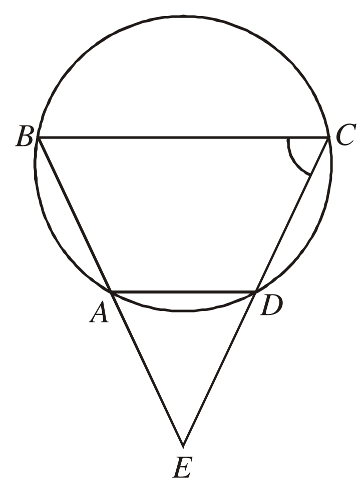
इसी प्रकार $\angle CQP + \angle CBP = 180^\circ$

$\therefore$ चतुर्भुज BCQP के सम्मुख कोण सम्पूरक है।

अतः चतुर्भुज BCQP एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उदाहरण 4 - चक्रीय चतुर्भुज ABCD की दो सम्मुख भुजाएँ BA तथा CD बढ़ाने पर एक दूसरे को E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔEAD तथा ΔECB समरूप हैं।

दिया है - चक्रीय चतुर्भुज ABCD जिसमें AB तथा DC बढ़ाने पर बिन्दु E पर मिलती है।



सिद्ध करना है - $\Delta EAD \sim \Delta ECB$

उपपत्ति - $\because$ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$........ (1)

परन्तु $\angle BAD + \angle EAD = 180^\circ$ .... (2)

समीकरण (1) तथा (2) से

$\angle BAD + \angle BCD = \angle BAD + \angle EAD$

$\angle BCD = \angle EAD$ .... (3)

इसी प्रकार

$\angle ABC = \angle EDA$ .... (4)

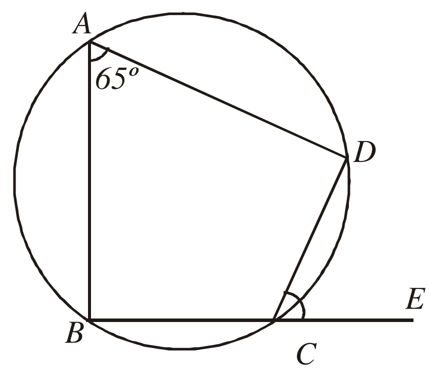
अब ΔEAD तथा ΔEDA में

$\angle EAD = \angle BCD$

$\angle EDA = \angle ABC$

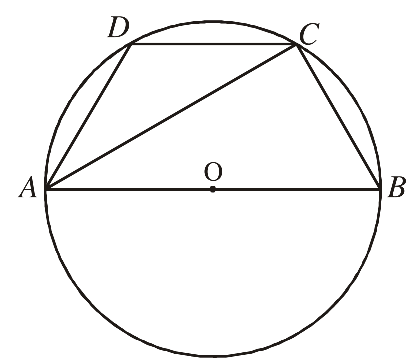
$\Delta EAD \sim \Delta ECB$ *(क्यों ?)*

अभ्यास



1. निम्न चित्र में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है तथा BCE एक रेखा है। यदि $\angle BAD = 65^o$ तो $\angle DCE$ का माप ज्ञात करो।

2. ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। D उसके परिवृत्त पर कोई बिन्दु है तो $\angle BDC$ तथा $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।



3. चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। $\angle BAC = 30^o$ तो $\angle ADC$ की माप ज्ञात करो।

4. यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज की दो भुजाएँ समान्तर हैं तो सिद्ध कीजिए कि शेष दो भुजाएँ बराबर हैं एवं विकर्ण भी बराबर हैं।

पाठको के लिए विशेष

यदि चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ a, b, c, d हों तो

चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल = = $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

जहाँ $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

अध्याय 25 वृत्त की स्पर्श रेखाएँ

उद्देश्य

- किसी समतल में एक वृत्त एवं एक रेखा की स्थिति का बोध कर सकेंगे।
- वृत्त की स्पर्श रेखा, छेदक रेखा, स्पर्श बिन्दु तथा दो वृत्तों का स्पर्श का बोध कर सकेंगे।
- वृत्त की स्पर्श रेखा सम्बन्धी कतिपय प्रमेय का ज्ञान प्राप्त करेंगे।

शिक्षण बिन्दु

- वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु, छेदक रेखा।
- दो वृत्तों का स्पर्श
- वृत्त की स्पर्श रेखा सम्बन्धी कतिपय प्रमेय

प्रस्तुतीकरण

किसी समतल में एक वृत्त एवं एक रेखा की स्थिति निम्नलिखित तीन प्रकार से सम्भव है।

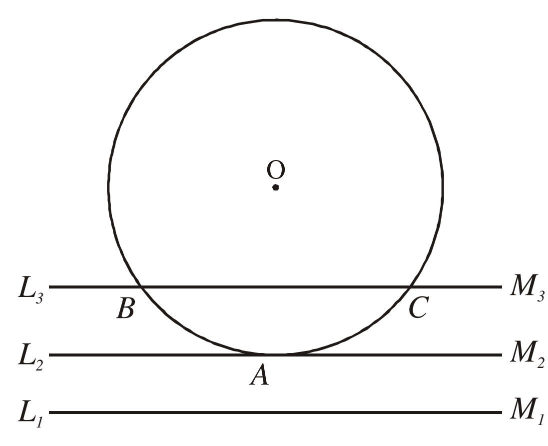
1. रेखा वृत्त को नहीं काटती है।
2. रेखा वृत्त को एक बिन्दु पर काटती है।
3. रेखा वृत्त को दो बिन्दुओं पर काटती है।

टिप्पणी

कोई सरल रेखा किसी वृत्त को दो से अधिक बिन्दुओं पर नहीं काट सकती है।

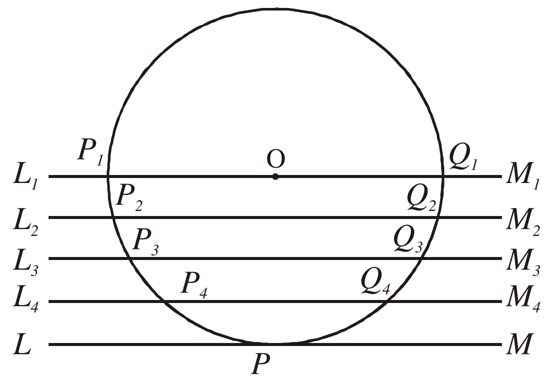
संलग्न चित्र में रेखा L_1M_1 वृत्त को नहीं काटती है। रेखा L_2M_2 वृत्त को एक बिन्दु A पर काटती हैं और L_3M_3 वृत्त को दो बिन्दुओं B और C पर काटती हैं।

रेखा L_3M_3 को इस वृत्त की छेदक रेखा कहते हैं और L_2M_2 को उस वृत्त की स्पर्श रेखा कहते हैं।



छेदक रेखा -

वह रेखा जो किसी दिये हुए वृत्त को दो बिन्दुओं पर काटती है, उसे वृत्त की छेदक रेखा कहते हैं।

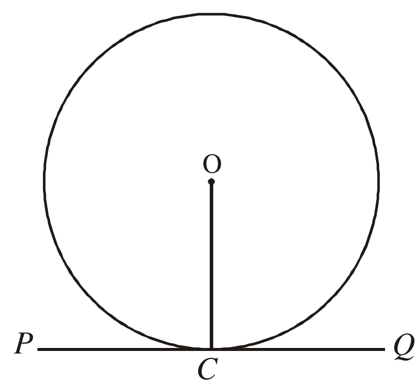


संलग्न चित्र में वृत्त की कोई छेदक रेखा L_1M_1 लीजिए, जो वृत्त को दो बिन्दुओं P_1 और Q_1 पर काटती हैं। अब L_1M_1 के समान्तर अनेक ऐसी रेखाएँ L_2M_2 , L_3M_3 , L_4M_4 होंगी जो वृत्त को $(P_2, Q_2), (P_3, Q_3),(P_4, Q_4)$ पर काटेगी तथा केन्द्र से जितनी अधिक दूरी पर स्थित होंगी, उतनी ही उस (रेखा द्वारा काटी गयी) जीवा की लम्बाई कम होंगी और एक स्थिति ऐसी आयेगी जबकि जीवा की लम्बाई शून्य हो जायेगी। ऐसी स्थिति में जीवा के अन्त्य बिन्दु P एवं Q मिलकर एक हो जाते हैं। अर्थात् इस स्थिति में बिन्दु P एवं Q सम्पाती हैं।

इस दशा में जब छेदक रेखा वृत्त को दो पृथक बिन्दुओं पर न काटकर केवल दो सम्पाती बिन्दुओं पर काटती हैं अर्थात् केवल एक बिन्दु P पर वृत्त को स्पर्श करती हैं, तो रेखा LPM वृत्त की स्पर्श रेखा अथवा स्पर्शी कहते हैं।

स्पर्श रेखा -

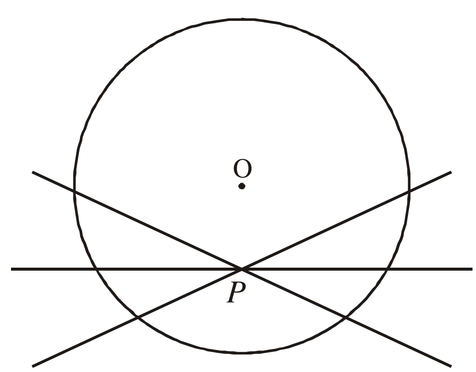
जब कोई ऋजु रेखा किसी वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती है तो उसे वृत्त की स्पर्श रेखा कहते हैं और उस बिन्दु को स्पर्श बिन्दु कहते हैं।



संलग्न चित्र में PQ वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा बिन्दु C उसका स्पर्श बिन्दु है।

किसी बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा किन परिस्थितियों में खींची जा सकती हैं।

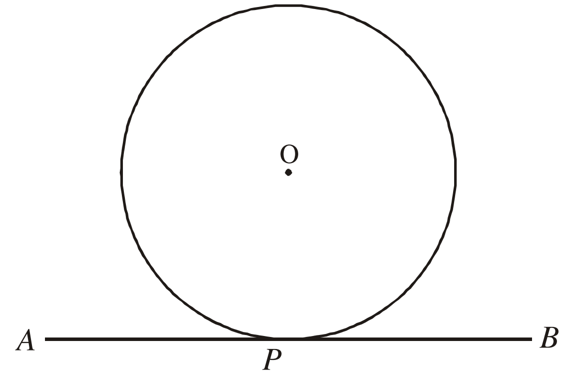
चित्रानुसार यह स्पष्ट है कि -



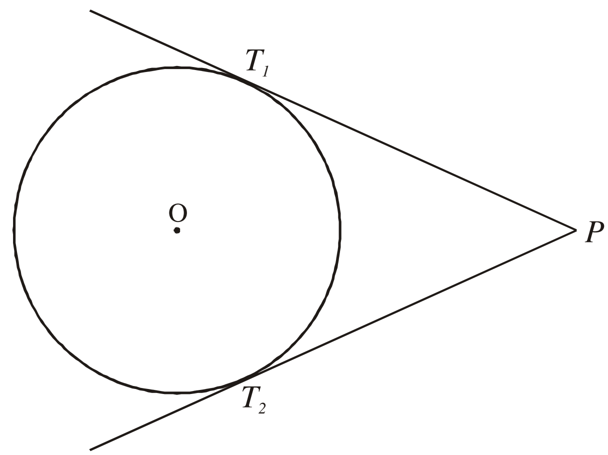
1. यदि कोई बिन्दु P वृत्त के अन्दर स्थित हो तो उस बिन्दु से वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा खींचना सम्भव नहीं है।

2. यदि कोई बिन्दु वृत्त पर स्थित है तो उस बिन्दु से वृत्त पर केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती हैं।

अर्थात् स्पर्श रेखा AB वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती हैं।



3. यदि कोई बिन्दु वृत्त के बाहर स्थित हैं तो उस बिन्दु से वृत्त पर केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं। यदि इन रेखाओं के स्पर्श बिन्दु T_1 और T_2 हो तो T_1P तथा T_2P वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ हैं।



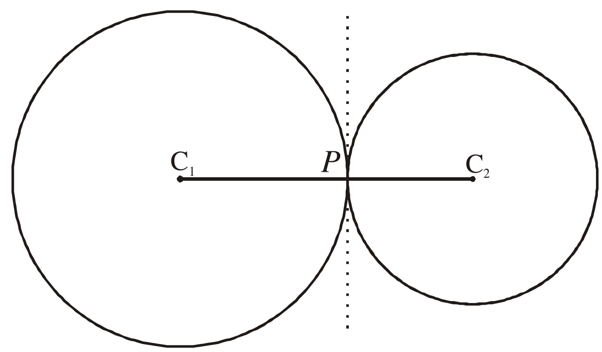
दो वृत्तों का स्पर्श -

दो वृत्तों का स्पर्श दो प्रकार से होता है।

(I) बाह्य स्पर्श

यदि दो वृत्त एक दूसरे को इस प्रकार स्पर्श करें कि वे एक दूसरे के बाहर हो तो वे बाह्य स्पर्श करते हैं।

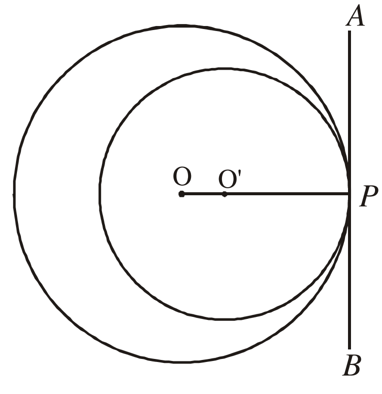
संलग्न चित्र में दोनों वृत्त एक दूसरे बाह्यतः बिन्दु P पर स्पर्श करते हैं।



(II) अन्तः स्पर्श

यदि दो वृत्त एक दूसरे को इस प्रकार स्पर्श करें कि एक वृत्त दूसरे वृत्त के अन्दर हों तो वे अन्तः स्पर्श करते हैं।

संलग्न चित्र में दोनों वृत्त एक दूसरे को अन्तः बिन्दु P पर स्पर्श करते हैं।



टिप्पणी :

उपर्युक्त दोनों दशाओं में, दोनों वृत्तों को केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा $(O\ O')$ वृत्तों के स्पर्श बिन्दु P से होकर जाता है।

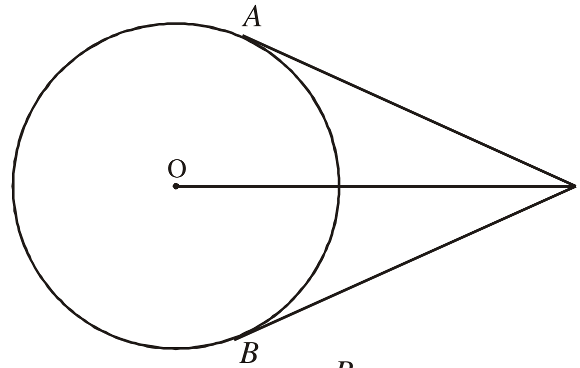
स्पर्श रेखाओं से सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

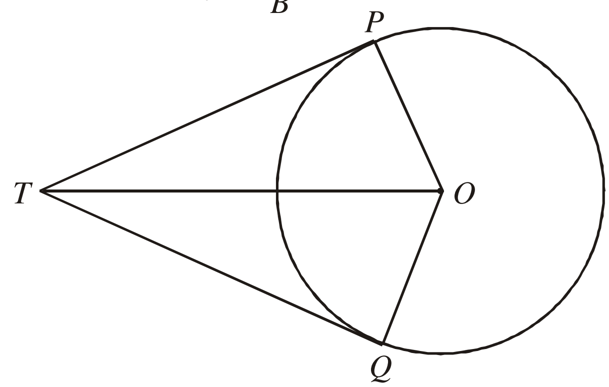
1. वृत्त के किसी एक बिन्दु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।
2. वृत्त के किसी स्पर्श रेखा पर स्पर्श बिन्दु से खींचा गया लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता हैं।
3. स्पर्श बिन्दु को वृत्त के केन्द्र से मिलाने वाली रेखा स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।
4. यदि किसी बाह्य बिन्दु T से वृत्त पर खींची गयी दो स्पर्श रेखाएँ TP और TQ हैं तब

   a. $TP = TQ$

   b. $\angle PTO = \angle QTO$

   c. $\therefore \angle TOP = \angle TOQ$





स्पर्श रेखा सम्बन्धी प्रमेय

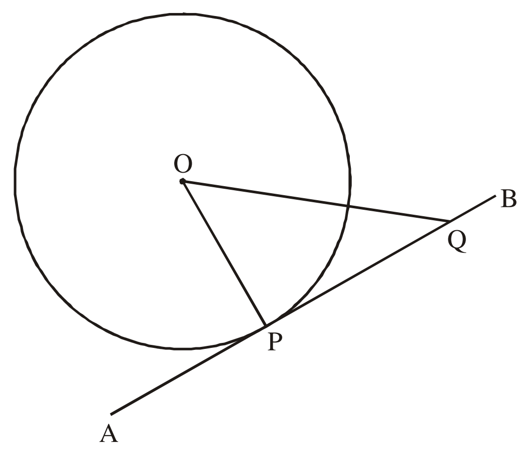
प्रमेय नं. 1

स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

दिया है - एक वृत्त का केन्द्र O है और वृत्त पर एक बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्श रेखा AB खींची गयी है।

सिद्ध करना है - $AB \perp OP$

रचना - ऋजु रेखा AB पर बिन्दु P के अतिरिक्त एक बिन्दु Q लीजिए तथा रेखा OQ को मिलाया।



प्रमाण - वृत्त के बिन्दु P पर APB स्पर्श रेखा है और बिन्दु Q भी इसी स्पर्श रेखा पर स्थित है।

बिन्दु Q, वृत्त के बर्हिभाग में हैं क्योंकि स्पर्श बिन्दु के अतिरिक्त वृत्त की स्पर्श रेखा पर स्थित सभी बिन्दु वृत्त के बाहर स्थित हैं।

$\therefore OQ > OP$

इस प्रकार ऋजुरेखा AB पर स्पर्श बिन्दु के अतिरिक्त सभी बिन्दुओं से केन्द्र तक खींची गयी रेखाएँ, त्रिज्या OP से बड़ी होगी तो केन्द्र से वृत्त की स्पर्श रेखा पर स्थित सभी बिन्दुओं तक खींची गयी ऋजु रेखाओं में त्रिज्या OP सबसे छोटी रेखा है।

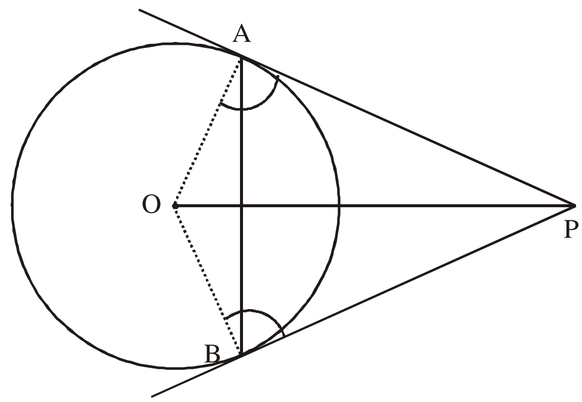
$OP \perp AB$

अर्थात् $AB \perp OP$ इति सिद्धम

प्रमेय 2

सिद्ध कीजिए कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती है और वे परस्पर समान होती है तथा केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं।

दिया है -



O केन्द्र वाले वृत्त पर उसके बाहर स्थित एक बिन्दु P से खींची गयी दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB जिनके स्पर्श बिन्दु A एवं B हैं।

सिद्ध करना है - $PA = PB$ तथा $\angle AOP = \angle BOP$

रचना - OA, OB तथा OP को मिलाया।

प्रमाण - ΔOAP तथा ΔOBP में,

$\angle OAP = \angle OBP$ (प्रमेय नं. 1 से)

भुजा OA = भुजा OB (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

भुजा OP उभयनिष्ठ हैं।

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$

अतः भुजा PA = भुजा PB और $\angle AOP = \angle BOP$ अर्थात् स्पर्श रेखाएँ PA और PB आपस में बराबर हैं और केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं।

उपप्रमेय -

किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण, उस बाह्य बिन्दु तथा वृत्त के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा द्वारा समद्विभाजित होता है।

उपर्युक्त प्रमेय के चित्र में

$\because \Delta OAP \cong \Delta OBP$

$\therefore \angle APO = \angle BPO$

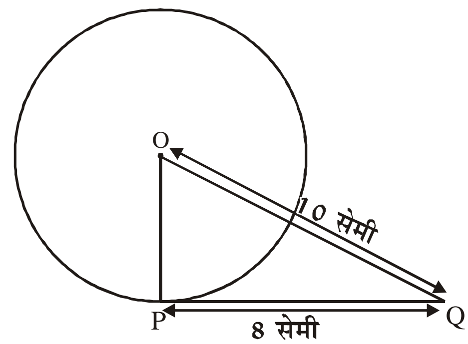
अतः रेखा OP, $\angle APB$ को समद्विभाजित करती है।

टिप्पणी : किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण का अर्द्धक, केन्द्र से होकर जाता है।

उदाहरण 1 - निम्न चित्र में, O एक वृत्त का केन्द्र है और किसी बिन्दु P पर PQ वृत्त की स्पर्श रेखा है। यदि $PQ = 8$ सेमी तथा $OQ = 10$ सेमी तो वृत्त की त्रिज्या की माप ज्ञात कीजिए।

हल - PQ, वृत्त की स्पर्श रेखा और OP, त्रिज्या है।

$\therefore \angle OPQ = 90^o$



समकोण ΔOPQ में,

$PQ = 8$ सेमी

$OQ = 10$ सेमी

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

या $OP^2 = OQ^2 - PQ^2$

$= (10)^2 - (8)^2$

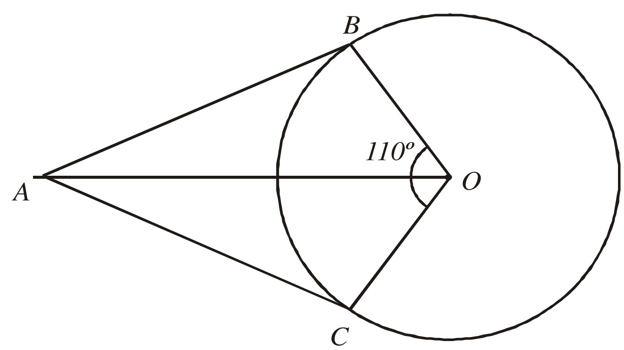
$= 100 - 64$

या, $OP^2 = 36$

या, $OP = \sqrt{36} = 6$

अतः वृत्त की त्रिज्या = 6 सेमी

उदाहरण 2 - चित्र में केन्द्र पर $\angle BOC = 110^o$, AB तथा AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle OAB$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल -

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 110^o = 55^o$$

तथा $\angle ABO = 90^o$

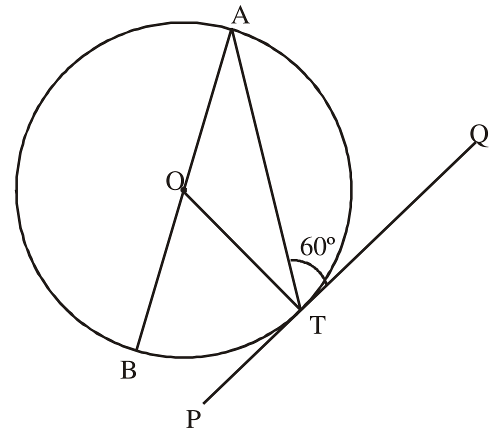
$\angle OAB = 180^o - (55^o + 90^o)$

$= 180^o - 145^o = 35^o$

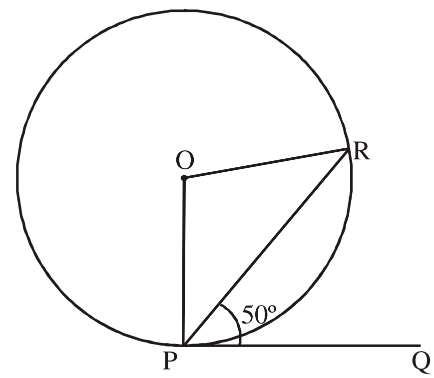
अतः $\angle OAB = 35^o$

मूल्यांकन

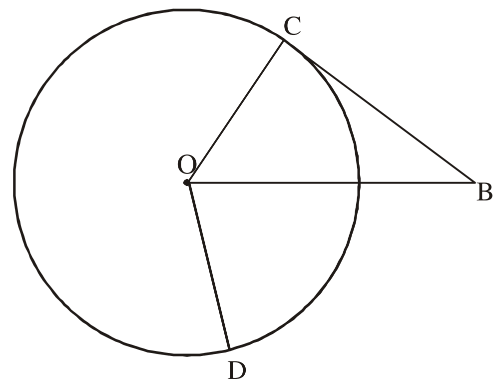
1. दिये गये चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है तथा PTQ बिन्दु T पर वृत्त की स्पर्शी है। यदि $\angle ATQ = 60^o$ तो $\angle OAT$ ज्ञात कीजिए।



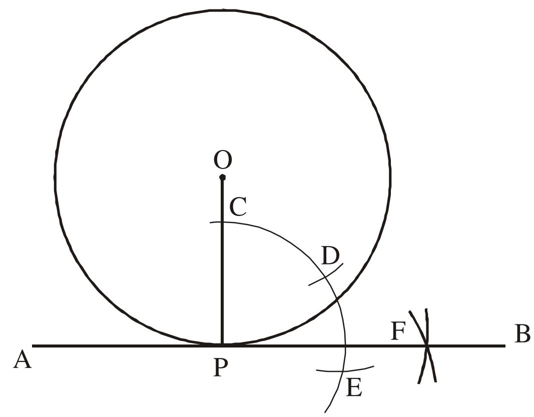
2. निम्न चित्र में, वृत्त का केन्द्र O है और PQ स्पर्श रेखा है। यदि $\angle RPQ = 50^o$ तो $\angle POR$ का मान ज्ञात कीजिए।



3. निम्न चित्र में, O केन्द्र के वृत्त की त्रिज्या $OD = 3$ सेमी है। यदि $OB = 5$ सेमी, तो स्पर्श रेखा BC की माप ज्ञात कीजिए।



अध्याय 26. वृत्त के किसी दिये हुये बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना करना -



1. जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो।

ज्ञात है O केन्द्र का वृत्त पर स्थित कोई बिन्दु P

रचना करनी है - बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा

रचना के चरण - OP को मिलाया।

बिन्दु P से त्रिज्या OP पर लम्ब PB डाला

रेखा PB बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा है।

स्पष्टीकरण

OP वृत्त की त्रिज्या है।

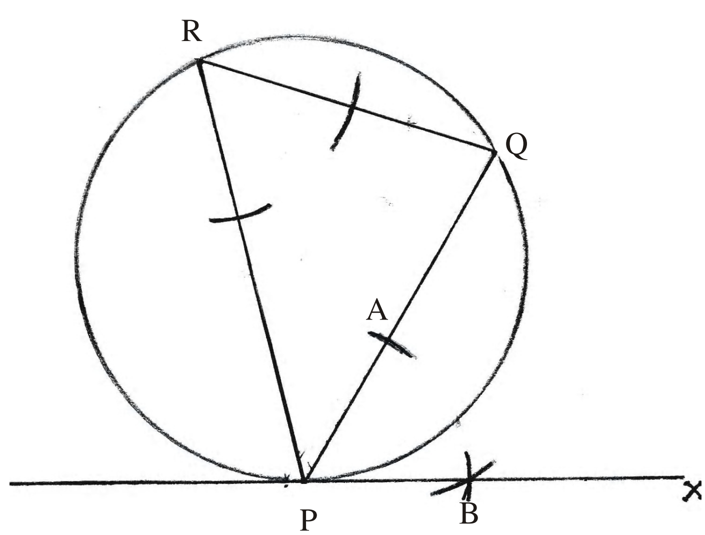
PB, त्रिज्या OP पर लम्ब है।

अतः PB, बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा है।

2. वृत्त के किसी दिये हुये बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना करना यदि वृत्त का केन्द्र अज्ञात है।

दिया है : अज्ञात केन्द्र का एक वृत्त तथा वृत्त पर स्थित एक बिन्दु P

रचना करनी है : बिन्दु P से वृत्त की स्पर्श रेखा।



रचना के चरण :

1. बिन्दु P से कोई जीवा PQ खींचा।
2. दीर्घ चाप PQ पर एक बिन्दु R लिया।
3. PR तथा QR को मिलाया।
4. बिन्दु P से PQ रेखा पर $\angle PRQ$ के बराबर $\angle QPX$ की रचना किया।
5. PX बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा है।

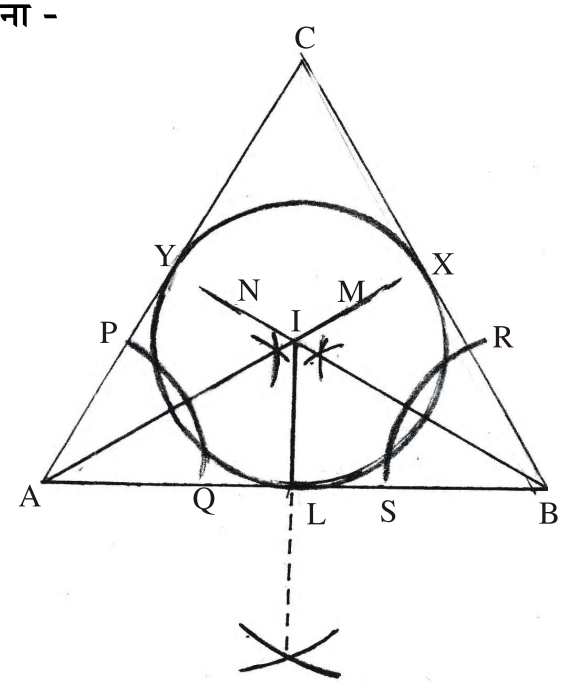
स्पष्टीकरण -

PQ वृत्त की जीवा है

रचना से $\angle QPX = \angle PRQ$ (एकांतर वृत्त खण्ड में स्थित है)

$\therefore$ PX वृत्त के बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा है।

3. किसी दिये गये त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की रचना करना -



दिया है - ΔABC

रचना करनी है - ΔABC के अन्तर्गत वृत्त की

रचना के चरण -

1. $\angle CAB$ की अर्द्धक रेखा AM खींची
2. $\angle CBA$ की अर्द्धक रखा BN खींची।
3. रेखायें AM तथा BN एक दूसरे को I पर काटती हैं।
4. बिन्दु I से रेखा AB पर लम्ब IL डाला
5. I को केन्द्र मान कर IL त्रिज्या से वृत्त खींचा।
6. वृत्त भुजाओं AB, BC तथा CA को क्रमशः L, X तथा Y पर स्पर्श करता है।

अतः उपर्युक्त वृत्त ΔABC का अन्तर्गत वृत्त है, जिसका केन्द्र I तथा त्रिज्या IL है।

स्पष्टीकरण -

⌘ रेखा AM, $\angle CAB$ को समद्विभाजित करती है। (रचना से)

⌘ अतः AM का प्रत्येक बिन्दु AC तथा AB से समदूरस्थ है।

⌘ रेखा BN, $\angle CBA$ का समद्विभाजित करती है। इसलिये रेखा BN का प्रत्येक बिन्दु, भुजा BC तथा AB से समदूरस्थ है।

⌘ रेखायें AM तथा BN एक दूसरे को I पर काटती है।

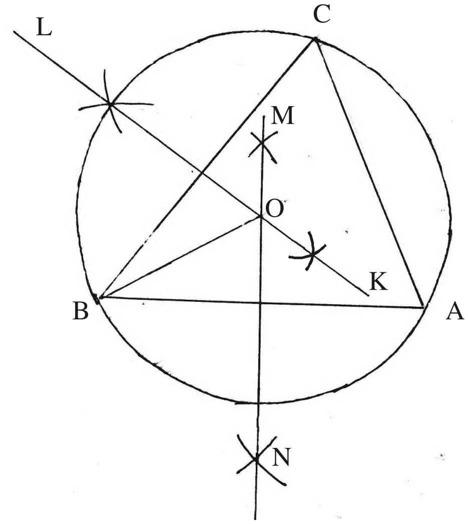
⌘ अतः बिन्दु I रेखाओं AB, BC तथा CA से समदूरस्थ है जो IL के बराबर है।

⌘ इसलिए I, को केन्द्र मानकर IL त्रिज्या से खींचा गया वृत्त त्रिभुज की भुजाओं AB, BC तथा CA का अन्तः स्पर्शी है।

विशेष

✍ अंतः वृत्त के केन्द्र को त्रिभुज का अंतः केन्द्र (*In centre*) कहते हैं।

4. किसी दिये गये त्रिभुज के परिवृत्त की रचना करना -



दिया है - $\Delta\ ABC$

रचना करनी है - $\Delta\ ABC$ का परिवृत्त

रचना के चरण -

भुजाओं AB तथा BC के लम्ब समद्विभाजक क्रमशः MN तथा KL खींचा।

लम्ब समद्विभाजक MN तथा KL एक दूसरे को O पर काटते हैं।

O को केन्द्र मान कर OB त्रिज्या ले कर एक वृत्त खींचा।

यह वृत्त त्रिभुज ABC के तीनों शीर्ष बिन्दुओं A, B तथा C से होकर जाता है। अतः यह $\Delta\ ABC$ का परिवृत्त है।

स्पष्टीकरण - MN भुजा AB का लम्ब समद्विभाजक है तथा बिन्दु O लम्बार्धक MN पर स्थित है। इसलिए $OA = OB$ । इसी प्रकार KL त्रिभुज की भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है तथा बिन्दु O, KL पर स्थित है। अतः

$$OB = OC$$

$$OA = OB = OC$$

अतः O को केन्द्र मानकर OA, OB या OC त्रिज्या का वृत्त त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B तथा C से होकर जायेगा। अतः यह वृत्त $\Delta\ ABC$ का परिवृत्त है।

विशेष - इसके केन्द्र को परिकेन्द्र कहते हैं।

5. किसी वृत्त के बाहर किसी बिन्दु से वृत्त की स्पर्श रेखायें खींचना -

दिया है - O केन्द्र तथा OP त्रिज्या का एक वृत्त और वृत्त के बाहर एक बिन्दु R

रचना करनी है - बिन्दु R से वृत्त की स्पर्श रेखाओं की।

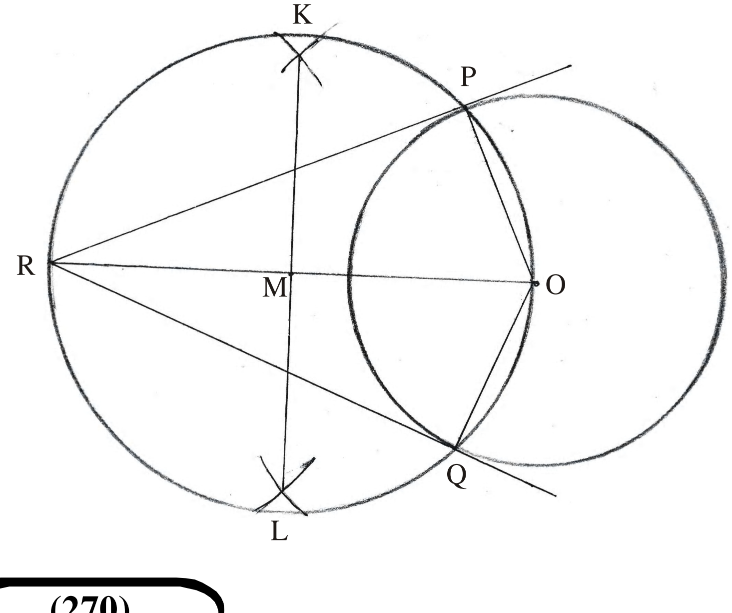
रचना के चरण - OR को मिलाया

OR का लम्ब समद्विभाजन किया। लम्ब समद्विभाजक रेखा OR को बिन्दु M पर काटती है।

M को केन्द्र मानकर MO त्रिज्या का वृत्त खींचा जो दिये गये वृत्त को क्रमशः P तथा Q पर काटता है।

RP तथा RQ को मिलाया।

RP तथा RQ दिये गये वृत्त पर बिन्दु R से खींची गयी स्पर्श रेखायें हैं।



स्पष्टीकरण - OP तथा OQ को मिलाया

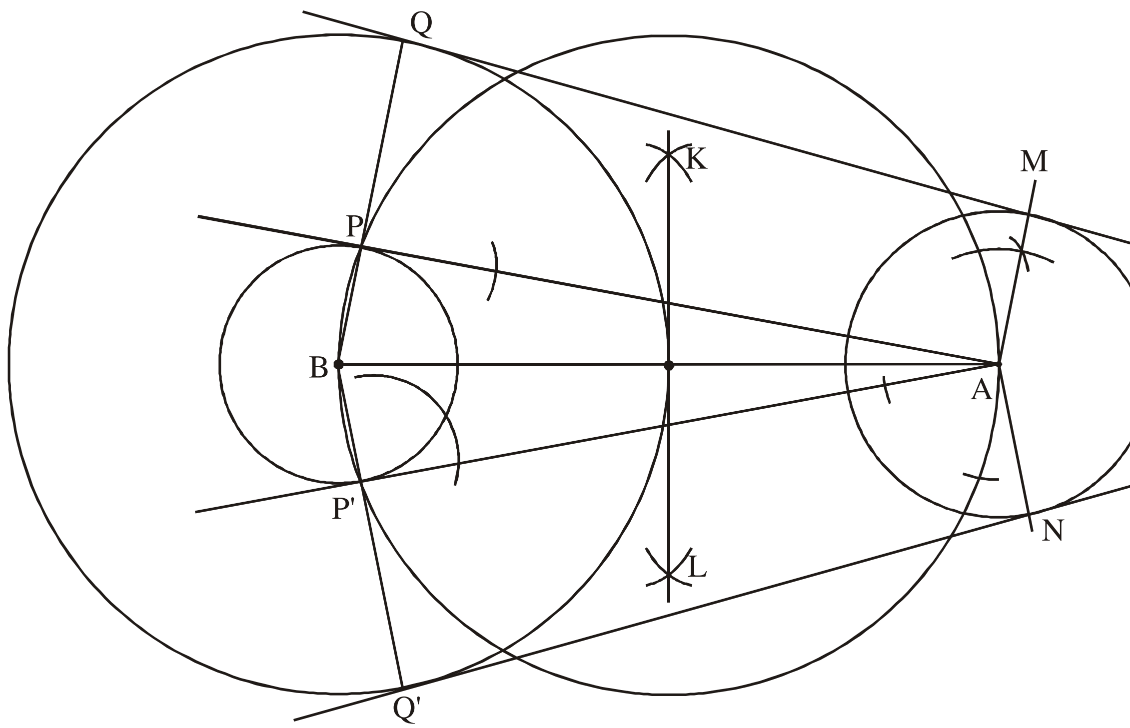
$\angle OPR$ अर्द्धवृत्त OPR में तथा $\angle OQR$ अर्द्धवृत्त OQR में स्थित है।

अतः $\angle OPR$ तथा $\angle OQR = 90^o$

$\therefore$ RP तथा RQ दिये गये वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

6. दो वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखायें खींचना।

दिया है - r_1 तथा r_2 त्रिज्या के दो वृत्त $(r_1 > r_2)$ जिनके केन्द्र क्रमशः B तथा A है। केन्द्रों के बीच की दूरी $BA = d$ ।



रचना करनी है - उपर्युक्त दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखाओं की।

रचना के चरण -

- रेखा खंड $BA = d$ सेमी. खींचा।
- B को केन्द्र मान कर r_1 त्रिज्या का तथा A को केन्द्र मानकर r_2 त्रिज्या का वृत्त खींचा।
- रेखाखण्ड BA को व्यास मानकर वृत्त खींचा।
- B को केन्द्र मानकर दोनों वृत्त की त्रिज्याओं के अंतर $(r_1 - r_2)$ त्रिज्या का वृत्त खींचा जो BA को व्यास मान कर खींचे गये वृत्त को क्रमशः P तथा P' पर काटता है।
- BP तथा BP' को बढ़ाया जो बड़े वृत्त से क्रमशः Q तथा Q' पर मिलता है।
- छोटे वृत्त के केन्द्र A से BP तथा BP' के समान्तर रेखायें क्रमशः AM तथा AN खींची जो छोटे वृत्त से क्रमशः M तथा N पर मिलती हैं।

✂ QM तथा $Q'N$ को मिलाया। QM तथा $Q'N$ दिये गये दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखायें हैं।

स्पष्टीकरण -

$PQ = r_1 - (r_1 - r_2) = r_2 = AM$

$PQ \parallel AM$ (रचना से)

$\angle BPA = 90^o$ (अर्द्धवृत्त में स्थित कोण हैं)

$\angle BPA = \angle QPA = 90^o$

$PQMA$ एक आयत हुआ

अतः $\angle PQM = \angle AMQ = 90^o$

QM दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखा हुई।

इसी प्रकार $Q'N$ भी दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखा होगी।

टिप्पणी : समकोण $\Delta\ BPA$ से $AP^2 = BA^2 - BP^2$

$$AP = \sqrt{BA^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

$$= \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

$$\because\ AP = MQ$$

अतः उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी की लम्बाई

$$MQ = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

$$= \sqrt{(\text{दोनों वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर})^2}$$

दो वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्शी रेखाओं की रचना करना।

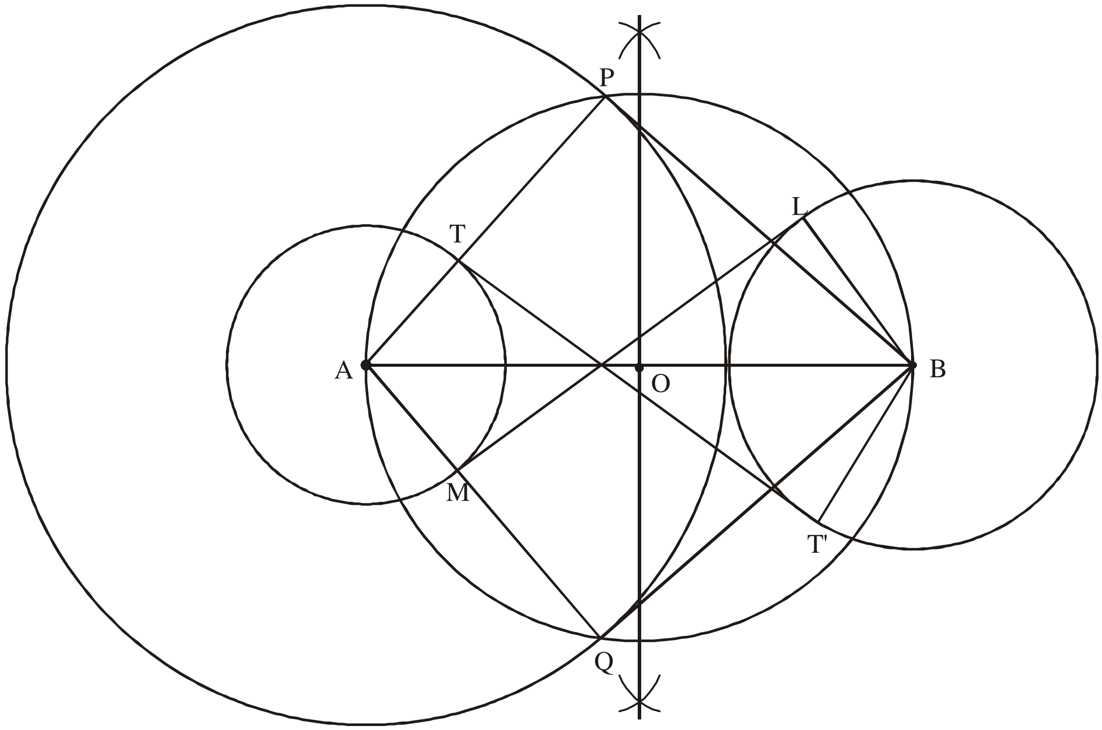
ज्ञात है - r_1 तथा r_2 त्रिज्याओं के दो वृत्त जिनके केन्द्र क्रमशः बिन्दु A तथा B पर स्थित हैं। $AB = d$ और $r_1 < r_2$

रचना करनी है - दोनों वृत्तों कीं उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्शी रेखा।

रचना के चरण -

✂ रेखाखण्ड AB खींचा तथा बिन्दु A तथा B को केन्द्र मानकर r_1 तथा r_2 त्रिज्याओं के दो वृत्तों की रचना किया।

✂ $(r_1 + r_2)$ त्रिज्या का एक वृत्त बिन्दु A को केन्द्र मान कर खींचा।



- AB को व्यास मानकर एक वृत्त की रचना किया जो $(r_1 + r_2)$ त्रिज्या के वृत्त को क्रमशः P तथा Q बिन्दुओं पर काटता है।
- AP तथा AQ को मिलाया।
- AP तथा AQ त्रिज्या r_1 के वृत्त को क्रमशः T और M पर काटता है।
- बिन्दु B से AP तथा AQ के समान्तर रेखायें क्रमशः BT' तथा BL खींचा जो r_2 त्रिज्या के वृत्त से क्रमशः T' व L पर काटता है।
- TT' तथा ML को मिलाया। TT' तथा ML, r_1 तथा r_2 त्रिज्या के दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्शी रेखायें हैं।

स्पष्टीकरण - $PT = BT' = r_2$ (रचना से)

$PT \parallel BT'$ (रचना से)

$\therefore$ PT तथा BT' परस्पर बराबर तथा समान्तर रेखायें हैं जिनके एक ओर के सिरों को मिलाने वाली रेखायें PB तथा TT' हैं।

$\therefore$ PB तथा TT' भी एक दूसरे के बराबर और समान्तर होंगी। तथा $PTT'B$ एक समान्तर चतुर्भुज होगा।

$\because$ $\angle APB = 90^o$ (अर्द्धवृत्त में स्थित कोण हैं)

$\therefore$ $PTT'B$ एक आयत होगा।

अतः $\angle ATT' = \angle BT'T = 90^o$

$\therefore TT'$ दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्शी रेखा होगी।

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि ML भी दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्शी रेखा होगी।

तिर्यक स्पर्शी रेखा की लम्बाई : समकोण ΔAPB से

$$BP^2 = AB^2 - AP^2$$

$$BP = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

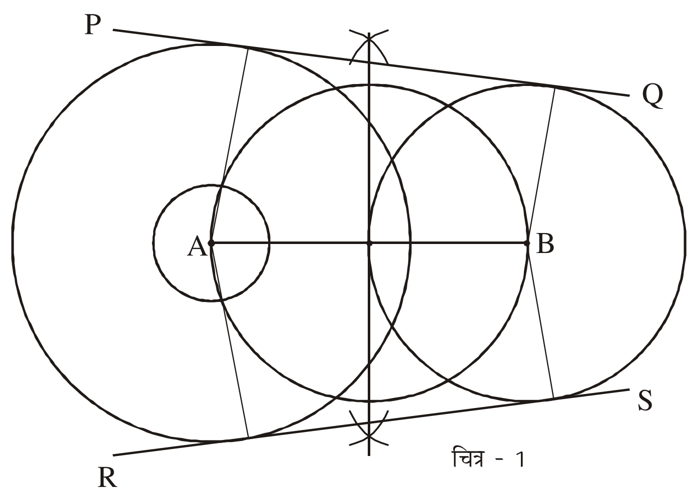
$$BP = TT'$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

$$TT' = = \sqrt{(\text{वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी का वर्ग}) - (\text{दोनां वृत्तों की त्रिज्याओं के योगफल का वर्ग})}$$

विशेष -

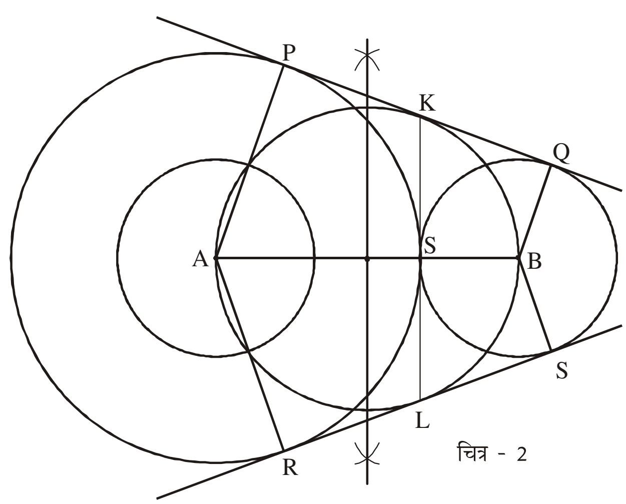
1. यदि दोनों वृत्त एक दूसरे को काटते हैं तो उनकी उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी रेखायें होंगी। PQ तथा RS उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी है। किन्तु उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्शी संभव नहीं हैं। (चित्र 1)



चित्र - 1

2. यदि दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं तो उनकी उभयनिष्ठ स्पर्शी रेखायें RS तथा PQ होंगी। चित्र (2)

यहाँ दो उभयनिष्ठ स्पर्शी रेखायें PQ तथा RS हैं। दोनों उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्शियाँ एक दूसरे पर संपाती हो कर स्पर्श रेखा KL हो जाती हैं तथा दोनों वृत्तों को केवल एक ही बिन्दु S पर स्पर्श करती है। (चित्र 2)



चित्र - 2

मूल्यांकन

- 5 सेमी त्रिज्या का एक समबाहु त्रिभुज बनाइये तथा इस त्रिभुज का अन्तः वृत्त खींचिये। इस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिये तथा गणना द्वारा अपने उत्तर कीं जाँच भी कीजिये।

- 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिये। वृत्त के केन्द्र से 8 सेमी की दूरी पर स्थित किसी बिन्दु से स्पर्श रेखायें खींचिए। स्पर्श रेखा की लम्बाई नाप कर ज्ञात कीजिये तथा गणना द्वारा इसकी जाँच कीजिये।
- दो वृत्तों के केन्द्र एक दूसरे से 10 सेमी की दूरी पर हैं तथा इनकी त्रिज्यायें क्रमशः 2 सेमी तथा 3 सेमी हैं। इनकी उभयनिष्ठ अनुस्पर्शी स्पर्शी रेखायें खींच कर इनकी लम्बाई नापिये तथा गणना द्वारा इसका पुष्टीकरण कीजिये।
- दो वृत्त जिनके केन्द्र एक दूसरे से 8 सेमी दूरी पर हैं, वृत्तों की त्रिज्यायें क्रमशः 2 सेमी तथा 3 सेमी हैं। इन वृत्तों की तिर्यक अनुस्पर्शी रेखायें खींच कर इनकी लम्बाई नापिये तथा गणना द्वारा इसकी जाँच कीजिये।
- ΔABC की रचना कीजिये जिसकी भुजा $BC = 6$ सेमी तथा $\angle B = 60^o$ तथा $\angle C = 70^o$ । ΔABC का परिवृत्त खींचिए। इसकी त्रिज्या नाप कर लिखिये।

इकाई 11 सरल रेखा

अध्याय 27. निर्देशांक ज्यामिति

उद्देश्य -

- दो अज्ञात राशियों वाला रैखिक समीकरण रेखा का सरल समीकरण होता है।
- अक्षों के समीकरणों का ज्ञान एवं उनके समान्तर रेखाओं के समीकरणों का ज्ञान।
- रेखाओं का प्रवणता रूप, अक्षों के अन्तः खण्ड तथा लम्ब रूप का ज्ञान।
- रेखा के व्यापक समीकरण को उसके विभिन्न स्वरूपों में बदलने का ज्ञान।
- दी गई रेखा के समान्तर एवं लम्बवत रेखा के समीकरण का ज्ञान
- दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु एवं उनके मध्य के कोण का ज्ञान
- किसी बिन्दु से रेखा की लम्बवत् दूरी एवं दो समान्तर रेखाओं के मध्य की दूरी का ज्ञान।

शिक्षण बिन्दु

- रैखिक समीकरण ही सरल रेखा का समीकरण होता है।
- अक्षों एवं उनके समान्तर रेखाओं का समीकरण
- रेखाओं के प्रवणता रूप, अन्तःखण्ड रूप तथा लम्ब रूप के समीकरण
- सरल रेखा के व्यापक समीकरण से रेखा के विभिन्न स्वरूपों को प्राप्त करना।
- दी गई रेखा के समान्तर एवं लम्बवत् रेखा प्राप्त करना।
- दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु को प्राप्त करना एवं प्रतिच्छेदन बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण प्राप्त करना।
- दो रेखाओं के मध्य के कोण को प्राप्त करना
- सरल रेखा से किसी बिन्दु की दूरी तथा दो समान्तर रेखाओं के मध्य की दूरी प्राप्त करना।

दो अज्ञात राशियों xऔर y वाले एक सरल समीकरण से x तथा y के निश्चित मान नहीं ज्ञात किये जा सकते हैं। जैसे : समीकरण

$$2x - y = 4 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

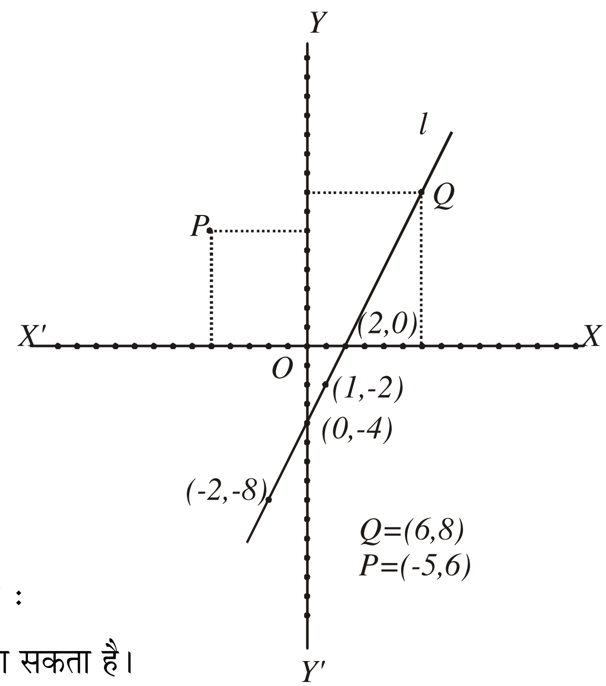
के अनन्त हल हैं :

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = -4 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = -2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = -2 \\ y = -8 \end{matrix}\right\} \quad \text{इत्यादि}$$

अर्थात् निर्देशांक $(0, -4), (1, -2), (2, 0), (-2, -8)$ ....

उपर्युक्त समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

उपर्युक्त निर्देशांकों को चित्रानुसार कार्तीय समतल में अंकित कर मिलाने पर सरल रेखा l प्राप्त होती है। अब रेखा l पर कोई बिन्दु Q ले तथा उसके निर्देशांक कार्तीय समतल पर ज्ञात करें, तो वे समीकरण (1) को सन्तुष्ट करते हैं, यहाँ $Q = (6, 8)$ तब,



$2 \times 6 - 8 = 4$। पुनः कार्तीय समतल पर कोई अन्य बिन्दु $P = (-5, 6)$ जो कि रेखा l पर स्थित नहीं है। यह समीकरण (1) को सन्तुष्ट नहीं करते हैं। अर्थात्

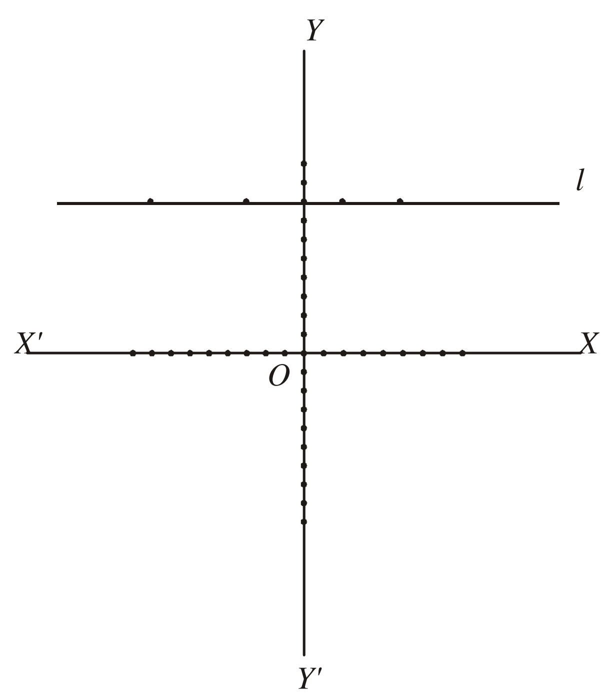
$$2 \times (-5) - 6 \neq 4$$

समीकरण $y = 4$ का ग्राफ (कार्तीय तल) पर प्रदर्शन :

समी $y = 4$ को $0\,x + y = 4$ द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। इसके अनन्त हल होंगे : -

$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 4 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x = -5 \\ y = 4 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = 4 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x = -8 \\ y = 4 \end{matrix}\right\} \quad \text{इत्यादि}$$

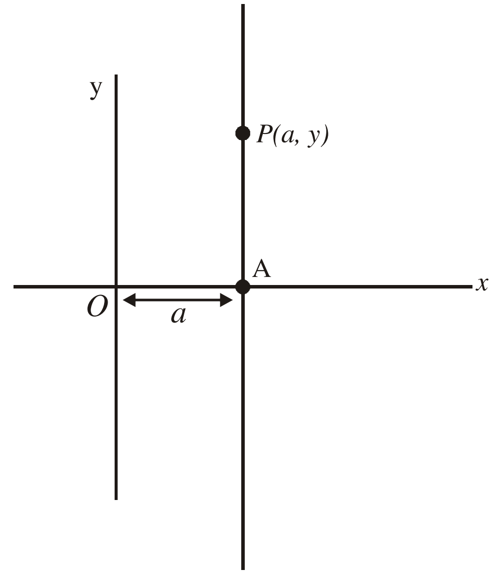
अतः समी. $y = 4$ का कार्तीय समतल पर निरूपण चित्रानुसार होगा



उपर्युक्त परिणामों से यह सिद्ध होता है कि समीकरण (1) निर्देशांक ज्यामिति में एक सरल रेखा को प्रदर्शित करता है।

अतः दो अज्ञात राशियों वाला रैखिक समीकरण सरल रेखा का समीकरण होता है।

अक्षों के समान्तर सरल रेखा का समीकरण



माना रेखा l y -अक्ष के समान्तर है तथा x -अक्ष को बिन्दु A पर काटती है तथा $OA = a$। माना रेखा l पर कोई अन्य बिन्दु P है तो उसके निर्देशांक (a, y) प्रकार के होंगे।

बिन्दु P का भुज *(abscissa)* सदैव a है। अतः

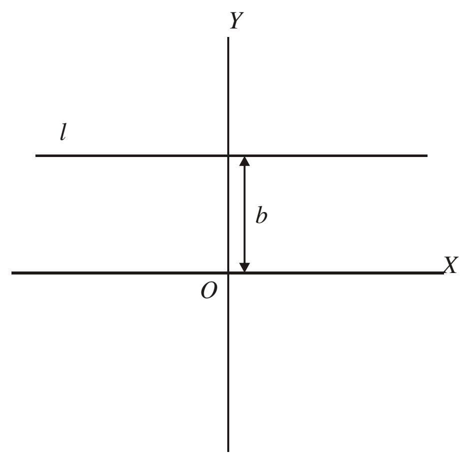
$$x = a \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

यह रेखा l के प्रत्येक बिन्दु के लिये सत्य है। अतः समीकरण (1) y-अक्ष के समान्तर रेखा को निरूपित करता है।

इसी प्रकार x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण

$$y = b \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

है।



समी (1) से प्रकट होता है कि y -अक्ष के समान्तर रेखा में चर y नहीं होता। इसी प्रकार समी (2) प्रदर्शित करती है कि x-अक्ष के समान्तर रेखा में चर x नहीं होता।

समी. (1) में यदि $a = 0$ तो $x = 0$ होगा, इसी प्रकार

समी. (2) में यदि $b = 0$ तो $y = 0$ होगा। अतः

x-अक्ष का समीकण $y = 0$

तथा y -अक्ष का समीकरण $x = 0$ है।

सरल रेखा का समीकरण जिसका y -अक्ष पर अंतःखण्ड तथा x-अक्ष से झुकाव ज्ञात हो

मान लीजिए रेखा का y -अक्ष पर अंतःखण्ड c तथा x-अक्ष से झुकाव θ है। सरल रेखा l पर कोई बिन्दु p (x, y) लिया।

चित्रानुसार $\tan\theta = \dfrac{PL}{BL} = \dfrac{y-c}{x}$

$$\Rightarrow y = x\tan\theta + c$$

$$\Rightarrow y = mx + c$$

(जहाँ $\tan\ \theta = m$)

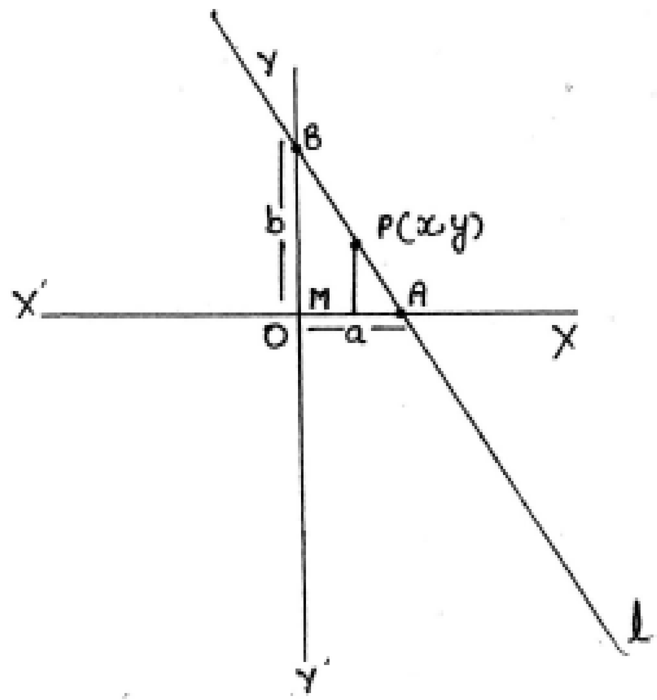
m को रेखा l की प्रवणता कहते हैं। यदि $c =$

0, तब समीकरण $y = mx$ बन जाएगा। अतः मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा, जिसकी प्रवणता m हो, का समीकरण $y = mx$ होता है।

सरल रेखा की प्रवणता यदि धनात्मक है तो रेखा का धन x-अक्ष से झुकाव न्यूनकोण तथा यदि प्रवणता ऋणात्मक है तो रेखा का x-अक्ष से झुकाव अधिक कोण (90^0 से अधिक तथा 180^0 से कम) होगा। अतः सरल रेखा का धन x-अक्ष से झुकाव 0^0 से 180^0 के मध्य होता है।

सरल रेखा का समीकरण जो x-अक्ष से अंतः खण्ड a तथा y -अक्ष से अन्तः खण्ड b काटती है।

रेखा l x-अक्ष पर a तथा y-अक्ष पर b का अन्तःखण्ड काटती है। रेखा पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है। चित्रानुसार $OA = a$, $OB = b$ तथा $MA = a-x$



समरूप ΔPMA तथा ΔBOA में

$$\frac{MA}{OA} = \frac{PM}{BO}$$

$$\Rightarrow \frac{a-x}{a} = \frac{y}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

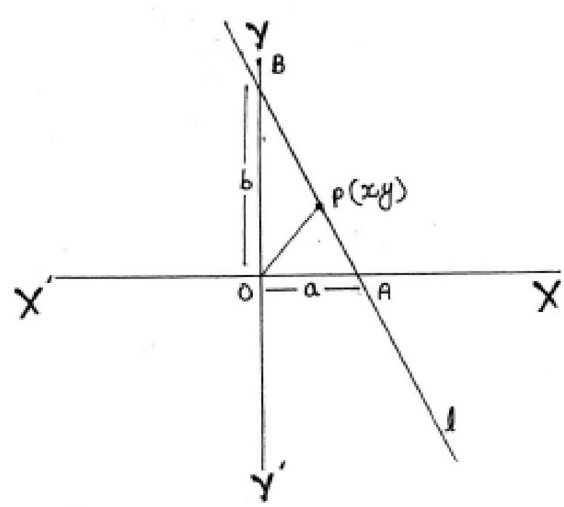
यह अभीष्ट समीकरण है।

इस समीकरण को इस प्रकार भी प्राप्त किया जा सकता है।

$$\Delta BOA = \Delta BOP + \Delta POA$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2} \times b \times x + \frac{1}{2} \times a \times y$$

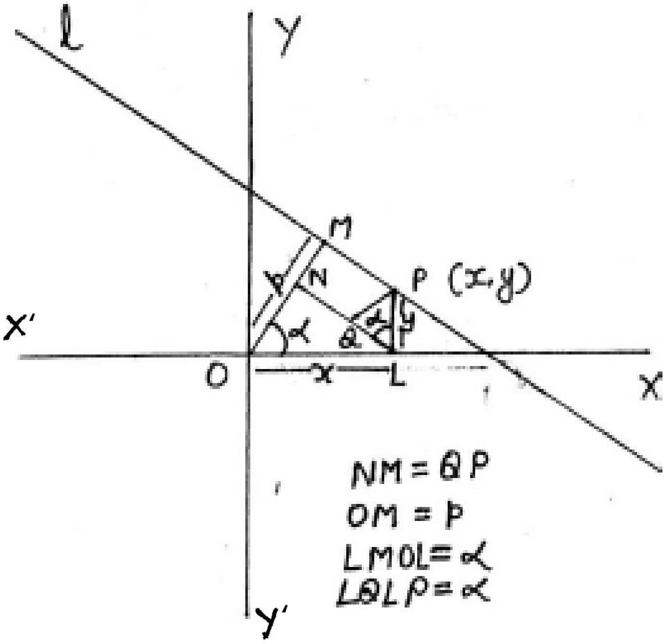
$$\Rightarrow 1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$



सरल रेखा का समीकरण जब उस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की माप एवं लम्ब का x-अक्ष से झुकाव ज्ञात हो।

माना रेखा l पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की माप p तथा लम्ब का x-अक्ष से झुकाव α है।

रेखा l पर कोई बिन्दु P है, जिसके निर्देशांक (x, y) हैं। बिन्दु P से x- अक्ष पर लम्ब PL तथा बिन्दु L से OM पर लम्ब LN एवं बिन्दु P से LN पर लम्ब PQ डाला



$$OM = ON + NM$$

$$p = x \cos \alpha + QP$$

$$p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण

दिये गये बिन्दु $Q\,(x_1, y_1)$ तथा $R\,(x_2, y_2)$ हैं। माना इन बिन्दुओं से रेखा l गुजरती है। रेखा l पर बिन्दु $P\,(x, y)$ लिया। बिन्दु P से x - अक्ष पर लम्ब PT तथा बिन्दु Q और R से x -अक्ष पर क्रमशः लम्ब RS और RL डाला। बिन्दु Q से PT पर लम्ब QM तथा RL पर लम्ब QN डाला।

$\Delta\, PQM$ तथा $\Delta\, RQN$ समरूप त्रिभुज हैं। अतः

$$\frac{PM}{RN} = \frac{QM}{QN}$$

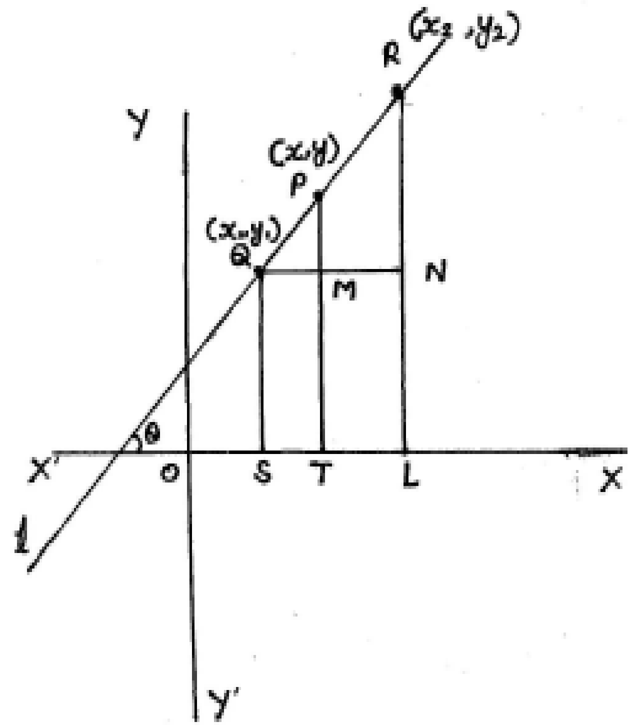
$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

यदि रेखा l का x-अक्ष से झुकाव θ हो तो

$$\tan\theta = \frac{RN}{QN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$



$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ को m उपर्युक्त समीकरण में से विस्थापित करने पर

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

यह एक बिन्दु (x_1, y_1) से जाने वाली ऐसी रेखा का समीकरण है, जिसकी प्रवणता m है।

उपर्युक्त सरल रेखा के विभिन्न स्वरूपों से यह स्पष्ट है कि सरल रेखा का व्यापक समीकरण दो चर राशियों का एक घातीय समीकरण $Ax + By + C = 0$ है जहाँ A, B, C ऐसी अचर वास्तविक संख्याएँ हैं (जो सामान्यतः सभी शून्य नहीं है)।

पुनश्च यदि किन्हीं तीन बिन्दुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य आता हो तो इसका तात्पर्य है कि वे तीनों बिन्दु एक रेखा पर स्थित हैं। इसका अनुप्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है कि कोई तीन बिन्दु संरेख हैं अथवा नहीं।

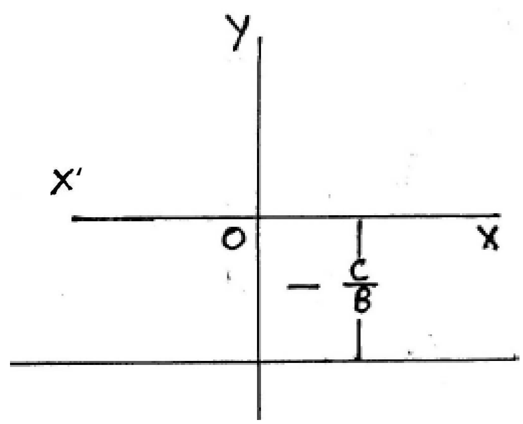
सरल रेखा के व्यापक समीकरण का उपर्युक्त वर्णित सरल रेखा के विभिन्न रूपों में परिवर्तन

1. समी. $Ax + By + C = 0$ में यदि $A = 0$ तो समी. का स्वरूप होगा :

$$By + C = 0$$

$$\Rightarrow\ y = -\frac{C}{B}$$

जो कि x-अक्ष के समान्तर सरल रेखा का समी. है।

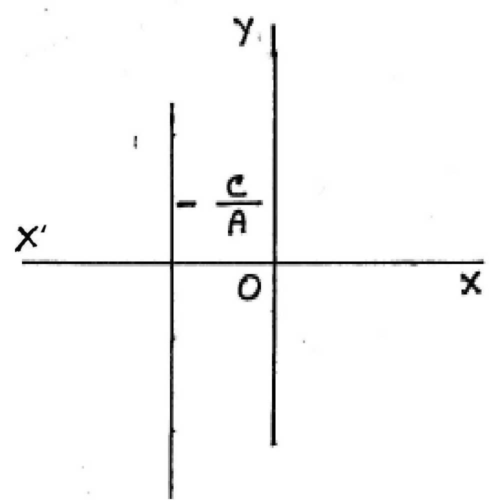


2. समी. $Ax + By + C = 0$ में यदि $B = 0$ तो समी. का स्वरूप होगा :

$$Ax + C = 0$$

$$\Rightarrow\ x = -\frac{C}{A}$$

जो कि y-अक्ष के समान्तर सरल रेखा का समी. है।



3. समी. $Ax + By + C = 0$ में

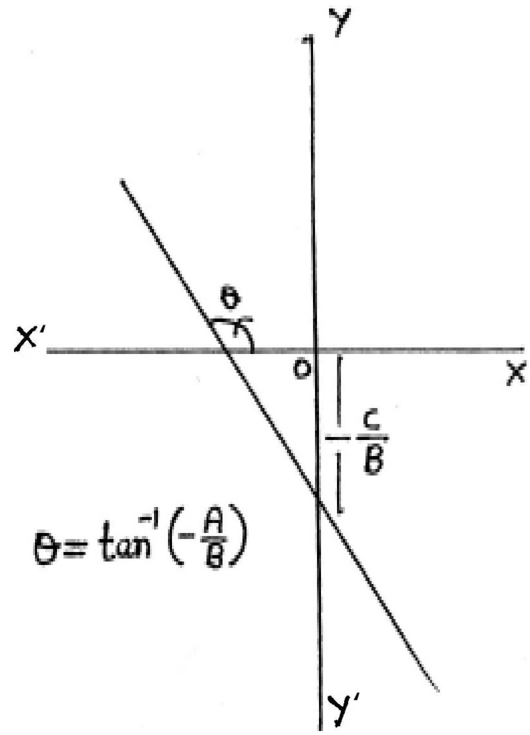
यदि $B \neq 0$

तो $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

यह $y = mx + c$ के स्वरूप की है।

जहाँ $m = -\frac{A}{B}$

तथा y-अक्ष से कटाव $= -\frac{C}{B}$



ध्यान देने योग्य

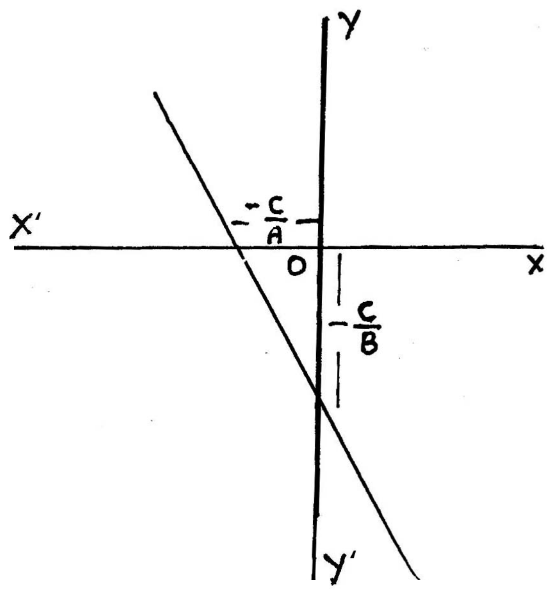
सरल रेखा x-अक्ष को जिस बिन्दु पर काटती हैं उससे दाहिनी ओर धन दिशा तथा बायीं ओर ऋणात्मक दिशा *(-ve)* मानी जाती है। रेखा का x-अक्ष से कोण धनात्मक दिशा से रेखा की ओर वामावर्त *(anti clock wise)* दिशा में नापा जाता है।

4. समी. $Ax + By + C = 0$ यदि $C \neq 0$

$$\Rightarrow Ax + By = -C$$

$$\Rightarrow \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$



यह $\frac{x}{x - \text{अक्ष पर कटा अन्तः खण्ड}} + \frac{y}{y - \text{अक्ष पर कटा अन्तः खण्ड}} = 1$

अर्थात् $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के स्वरूप की है।

जहाँ x-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= \frac{-C}{A}$

तथा y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= \dfrac{-C}{B}$ है।

सरल रेखा के व्यापक समीकरण में $y = 0$ रखने पर रेखा का x-अक्ष पर अन्तःखण्ड तथा $x=0$ रखने पर रेखा का y-अक्ष पर अन्तःखण्ड ज्ञात हो जाता है।

रेखा का व्यापक समीकरण

$$Ax + By + C = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

तथा रेखा का लम्ब रूप समीकरण

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \qquad \ldots\ldots\ldots. \qquad (2)$$

है। अब यदि समी. (1) तथा समी. (2) एक ही रेखा को प्रदर्शित करे तो

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = \frac{-p}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{C} = \frac{\cos\alpha}{-A} = \frac{\sin\alpha}{-B} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\alpha = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{तथा} \quad p = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

अतः व्यापक समी. (1) को लम्ब रूप में परिवर्तन के लिये सम्पूर्ण समी. को $\sqrt{A^2+B^2}$ से भाग दिया जाता है तथा अचर राशि (समी. (2) के स्वरूप में), जो कि रेखा पर मूल बिन्दु से लम्ब है सदैव धनात्मक होगा। यदि लम्ब ऋणात्मक है तो समी. को ऋण से गुणा करके लम्ब को धनात्मक किया जाता है। इसे निम्नांकित उदाहरणों एवं उनके चित्रांकन द्वारा स्पष्ट किया गया है।

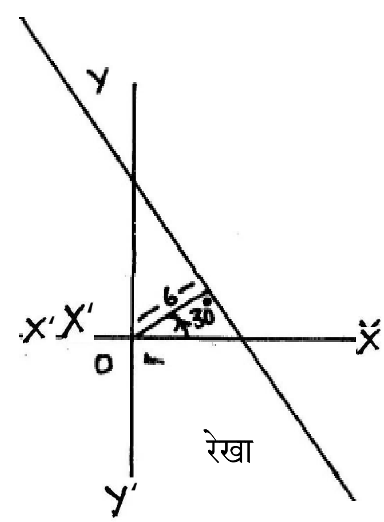
उदाहरण (अ) रेखा $\sqrt{3}x + y - 12 = 0$ को लम्ब रूप में परिवर्तित करो तथा लम्ब का x-अक्ष से झुकाव एवं लम्बाई ज्ञात करो।

हल - $\dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{12}{2}$

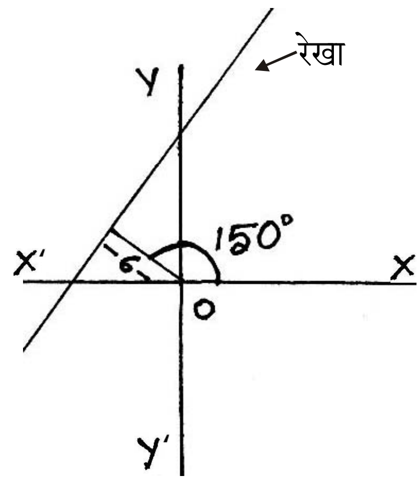
$$\Rightarrow x\cos 30^o + y\sin 30^0 = 6$$

अतः लम्ब का x-अक्ष से झुकाव $= 30^0$

तथा लम्ब की लम्बाई = 6 इकाई



उदाहरण (ब) रेखा $\sqrt{3}x - y + 12 = 0$ पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई एवं उसका x-अक्ष से झुकाव ज्ञात करो।



हल - $\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{2}y = -\frac{12}{2}$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 6$$

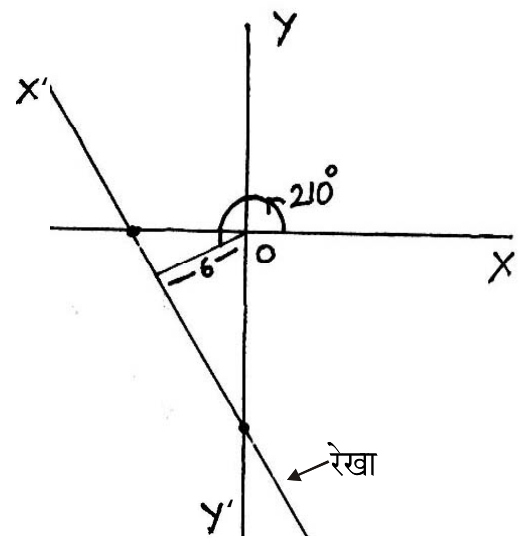
$$x\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

$$x \cos 150^o + y \sin 150^o = 6$$

अतः लम्ब का x-अक्ष से झुकाव = 150^0

तथा लम्ब की लम्बाई = 6 इकाई

उदाहरण (स) रेखा $\sqrt{3}x + y + 12 = 0$ पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई एवं लम्ब का x-अक्ष से झुकाव ज्ञात करो।



हल - $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = -\frac{12}{2}$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{12}{2}$$

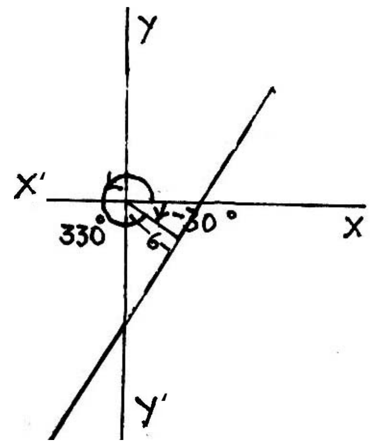
$$x\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$$

$$x \cos 210^o + y \sin 210^o = 6$$

अतः लम्ब का x-अक्ष से झुकाव = 210^0

तथा लम्ब की लम्बाई = 6

उदाहरण (द) रेखा $\sqrt{3}x - y - 12 = 0$ पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई एवं उसका x-अक्ष से झुकाव ज्ञात करो।



हल - $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 6$

$$x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\sin\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$$

$$x \cos(-30^o) + y \sin(-30^o) = 6$$

अतः लम्ब का x-अक्ष से झुकाव = -30^0 या 330^0

तथा लम्ब की लम्बाई = 6 इकाई

उदाहरण 2 - उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जिसकी प्रवणता $\sqrt{3}$ तथा y-अक्ष से कटाव $-\frac{4}{3}$ है।

इस समीकरण से ज्ञात करो -

अ. रेखा का x-अक्ष से झुकाव

ब. x-अक्ष पर अन्तः खण्ड

स. रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की माप एवं लम्ब का x-अक्ष से झुकाव ज्ञात कीजिये।

हल - रेखा का समीकरण :

$$y = \sqrt{3}x - \frac{4}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x - y = \frac{4}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

अ. रेखा का x-अक्ष से झुकाव = $\tan^{-1}\sqrt{3}$ ($y = mx + c$ से तुलना करने पर)

$= 60^o$

ब. $\frac{\sqrt{3}x}{\frac{4}{3}} - \frac{y}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}$ (समी. को $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के स्वरूप में प्राप्त किया)

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{4}{3\sqrt{3}}} - \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$$

अतः x-अक्ष पर अन्तः खण्ड $= \frac{4}{3\sqrt{3}}$ इकाई

स. समी. $3\sqrt{3}x - 3y = 4$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}x}{\sqrt{27+9}} - \frac{3y}{\sqrt{27+9}} = \frac{4}{\sqrt{36}}$$ ($\sqrt{A^2+B^2}$ से भाग देने पर)

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}x}{6} - \frac{3y}{6} = \frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x\cos(-30^0) + y\sin(-30^0) = \frac{2}{3}$$

अतः लम्ब का x-अक्ष से झुकाव = -30^0 या 330^0

तथा लम्ब की माप $= \frac{2}{3}$ इकाई

उदाहरण 3 - बिन्दु (4, -3) तथा (-1, 2) से जाने वाली रेखा का अक्ष से झुकाव ज्ञात करो।

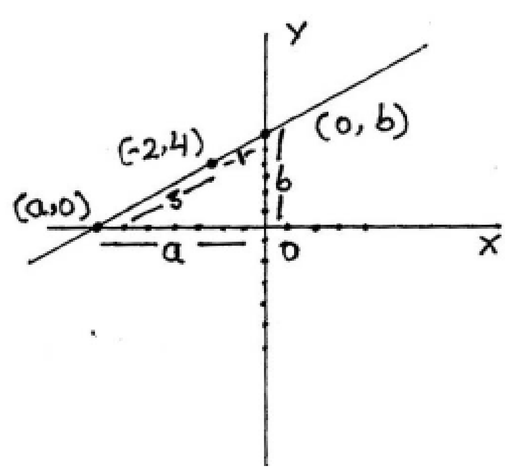
हल - रेखा की प्रवणता $= \frac{2+3}{-1-4}$

$$= \frac{5}{-5} = -1$$

$$= \tan 135^o$$

अतः रेखा का x-अक्ष से झुकाव = 135^0

उदाहरण 4 - किसी रेखा का x-अक्ष तथा y-अक्ष के मध्य कक्ष अन्तःखण्ड बिन्दु (-2, 4) द्वारा 3 : 1 के अनुपात में विभाजित होता है। इस रेखा तथा निर्देशाक्षों से घिरे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



हल - माना रेखा द्वारा x-अक्ष पर कटा अन्तः खण्ड = a

रेखा द्वारा y-अक्ष पर कटा अन्तः खण्ड = b

$$-2 = \frac{1\times a + 0\times 3}{1+3}$$

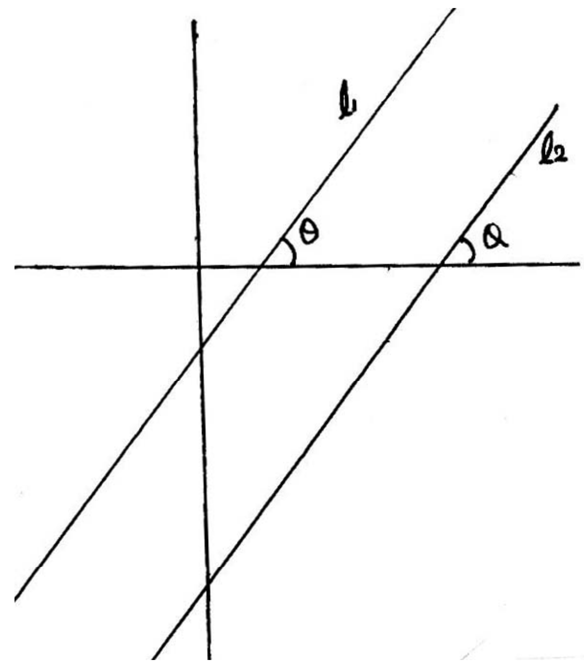
$$\Rightarrow -2 = \frac{a}{4} \Rightarrow a = -8$$

तथा $\quad 4 = \frac{3b}{4} \Rightarrow b = \frac{16}{3}$

अभीष्ट त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{16}{3} = \frac{64}{3}$ वर्ग इकाई

सरल रेखा के समान्तर रेखा

दो रेखायें समान्तर होंगी यदि उनके अक्षों से झुकाव बराबर हों अर्थात् उनकी प्रवणता समान हो। यहाँ l_1 तथा l_2 दो समान्तर रेखाएँ हैं जिनके समीकरण इस प्रकार हैं:



$l_1 \ : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad .... (1)$

$l_2 \ : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad .... (2)$

l_1 की प्रवणता $\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)$ तथा l_2 की प्रवणता $\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)$ आपस में बराबर हैं। अर्थात्

$$\frac{-a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$$

अर्थात् $\quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

मान लीजिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$

$\Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{k}$ तथा $b_2 = \frac{b_1}{k}$ ये मान समी. (2) में रखने पर,

$$l_2 : \frac{a_1x}{k} + \frac{b_1y}{k} + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow l_2 : a_1x + b_1y + C_2k = 0$$

$$\Rightarrow l_2 : a_1x + b_1y + \lambda = 0 \quad .... (3)$$

(जहाँ $\lambda = C_2 k$ अचर राशि है)

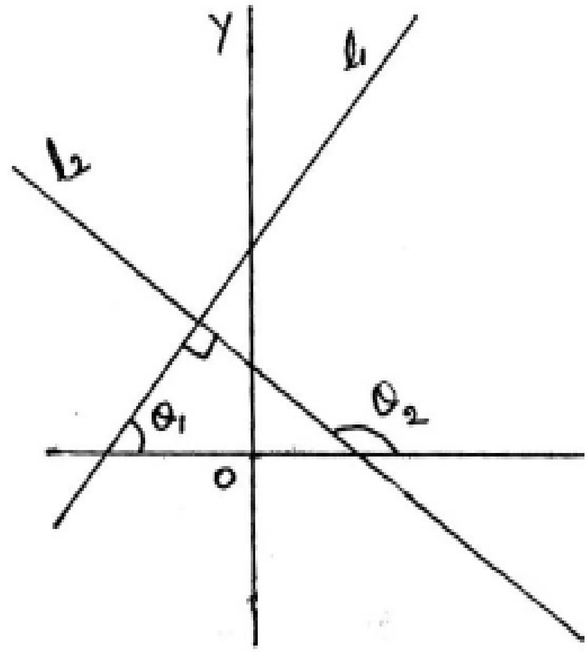
λ के विभिन्न मानों के लिए समी. (3) रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण है।

सरल रेखा के लम्बवत रेखा

l_1 तथा l_2 रेखाएँ एक दूसरे पर लम्बवत हैं। मान लीजिए इनके समीकरण इस प्रकार हैं :

$l_1 : y = m_1 x + c_1$

$l_2 : y = m_2 x + c_2$



चित्रानुसार

$\theta_2 = 90^o + \theta_1$

$\Rightarrow tan\theta_2 = tan\ (90^o + \theta_1)$

$\Rightarrow tan\theta_2 = -\ Cot\ \theta_1$

$$= -\frac{1}{\tan\theta_1}$$

$$\Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$\Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

यदि लम्ब रेखाओं के समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$.......... (1)

तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (2)

हों तो

$$m_1 = \frac{-a_1}{b_1},\ m_2 = \frac{-a_2}{b_2}$$

इस प्रकार $\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = 1$

अर्थात् $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

$$\frac{a_2}{b_1} = -\frac{b_2}{a_1} = k$$

$$a_2 = kb_1,\ b_2 = -ka_1$$

इस प्रकार रेखा (2) का समीकरण

$$kb_1x - ka_1y + c_2 = 0$$

अर्थात् $b_1x - a_1y + \lambda = 0$ हो जाएगा। (जहाँ $\frac{c_2}{k} = \lambda$)

अतः किसी दी गई रेखा की लम्बवत रेखा का समी. दी गई रेखा के x तथा y के गुणांकों को आपस में बदलकर तथा उनमें से किसी एक का चिन्ह बदलकर तथा किसी अन्य अचर राशि को रखने पर प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण : सरल रेखा $3x + 4y + 5 = 0$ की समान्तर तथा लम्ब रेखाएँ ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4, -5)$ से गुजरती हैं।

हल : $3x + 4y + 5 = 0$ के समान्तर रेखा का

m ec eer $3x + 4y + \lambda = 0$ .... (1) है।

समी. (1) में $(4, -5)$ रखने पर

$$3 \times 4 + 4 \times (-5) + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 8$$

यह मान समी. (1) में रखने पर

$3x + 4y + 8 = 0,$ यह समा. रेखा का समी. है।

दी गई रेखा के लम्बवत रेखा का समी.

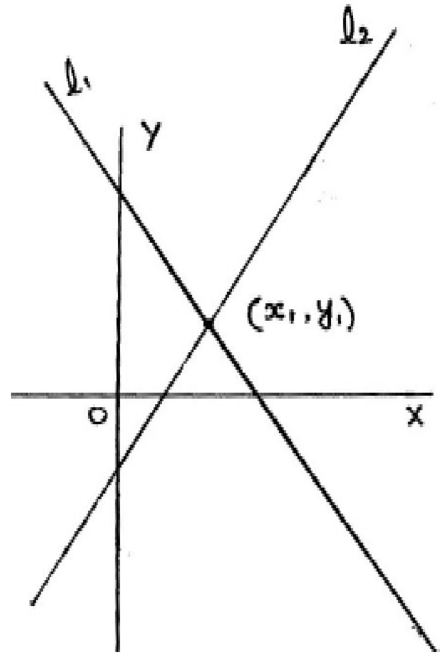
$4x - 3y + \lambda^1 = 0$ .... 2 है

समी. (2) में $(4,-5)$ रखने पर

$$4 \times 4 - 3(-5) + \lambda' = 0$$

$\lambda' = -31$ यह मान समी. (2) में रखने पर

$4x - 3y - 31 = 0$ यह अभीष्ट लम्ब रेखा का समी. है।



दो सरल रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु

माना दो सरल रेखाएँ l_1 तथा l_2 एक दूसरे को (x_1, y_1) पर काटती हैं।

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad .... \quad (1)$$

$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad .... \quad (2)$$

l_1 तथा l_2 में (x_1, y_1) रखने पर

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0 \quad .... \quad (3)$$

$$a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0 \quad .... \quad (4)$$

अतः $$\frac{x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y_1}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}, \quad y_1 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

दो सरल रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु को युगपत समीकरणों को हल करने की विधि से हल करके प्राप्त करना अधिक उपयुक्त होगा।

दो सरल रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाली रेखाओं का समीकरण

माना $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad .... \quad (1)$

तथा $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad .... \quad (2)$

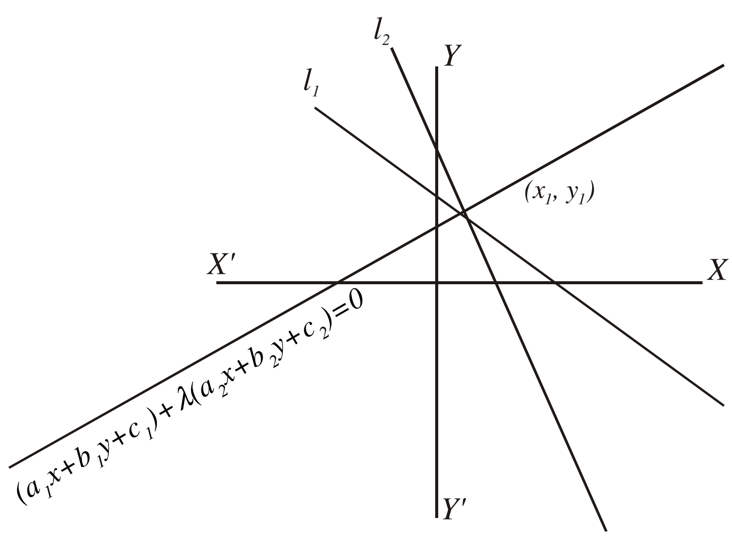
दोनों रेखाएँ एक दूसरे को (x_1, y_1) पर काटती हैं। अतः (x_1, y_1) दोनों रेखाओं को सन्तुष्ट करेगा।

पुनः $(a_1x + b_1 y + c_1) + \lambda (a_2x + b_2 y + c_2) = 0$ .... (3)

एक घातीय समीकरण है।

अतः यह एक सरल रेखा को निरूपित करती है। बिन्दु (x_1, y_1) को समी. (3) के बायें पक्ष में रखने पर -

$(a_1x + b_1 y + c_1) + \lambda (a_2x + b_2 y + c_2) = 0$



= दायाँ पक्ष

अतः समी. (3) ऐसी सभी रेखाओं के समूह को व्यक्त करता है जो रेखाओं 1 तथा 2 के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है। λ के विभिन्न मान भिन्न-भिन्न रेखाओं को प्रदर्शित करेंगे। λ का मान प्रश्न में दिये गये प्रतिबन्ध से ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण - उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो रेखाओं $2x - 3y + 4 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरती है तथा रेखा $6x - 7y + 8 = 0$ पर लम्ब है।

हल - $2x - 3y + 4 = 0$ .... (1)

$3x + 4y - 5 = 0$ .... (2)

$6x - 7y + 8 = 0$ .... (3)

रेखा (1) तथा रेखा (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण

$2x - 3y + 4 + \lambda(3x + 4y - 5) = 0$

$(2 + 3\lambda)x + (4\lambda - 3)y + 4 - 5\lambda = 0$ .... (4)

यह रेखा दी गई रेखा (3) पर लम्बवत् है। अतः उनकी प्रवणताओं का गुणनफल -1 होगा।

$$\frac{6}{7}\times\left(-\frac{2+3\lambda}{4\lambda-3}\right) = -1$$

$$\Rightarrow 6(2+3\lambda) - 7(4\lambda-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{33}{10},$$

इस मान को समी. (4) में रखने पर,

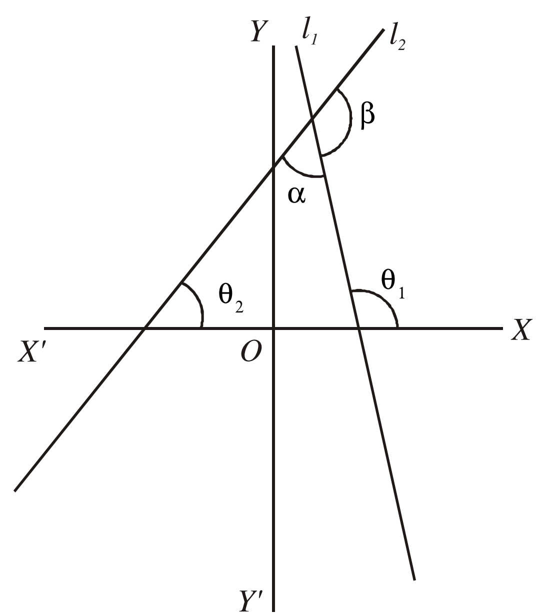
$$x\left(2+\frac{33}{10}\times 3\right) + y\left(4\times\frac{33}{10}-3\right) + 4 - 5\times\frac{33}{10} = 0$$

$$119x + 102y - 125 = 0$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

दो सरल रेखाओं के बीच का कोण

माना दो सरल रेखाओं l_1 का x-अक्ष से झुकाव θ तथा l_2 का x-अक्ष से झुकाव θ_2 है। इस प्रकार l_1 की प्रवणता $\tan\theta_1 = m_1$ और l_2 की प्रवणता $\tan\theta_2 = m_2$ होगी।



इन रेखाओं के मध्य के कोण α तथा β हैं जिनमें से एक कोण न्यून कोण तथा दूसरा अधिक कोण होगा (यदि रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब नहीं हैं, ऐसी दशा में α तथा β दोनों समकोण होंगे) तथा

$\alpha + \beta = 180^o$

$\Rightarrow \beta = 180^o - \alpha$

$\Rightarrow \tan\beta = \tan(180^o - \alpha) = -\tan\alpha$ ..... (1)

चित्रानुसार $\theta_1 = \alpha + \theta_2$

$\Rightarrow \alpha = \theta_1 - \theta_2$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow \tan\beta = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

सामान्यतः दो रेखाओं के मध्य के कोण से तात्पर्य न्यूनकोण से होता है।

अतः

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$ का प्रयोग किया जाता है।

अतः रेखाओं

$y = m_1 x + c_1$ तथा

$y = m_2 x + c_2$ के बीच के कोण α का सम्पूर्ण सूत्र

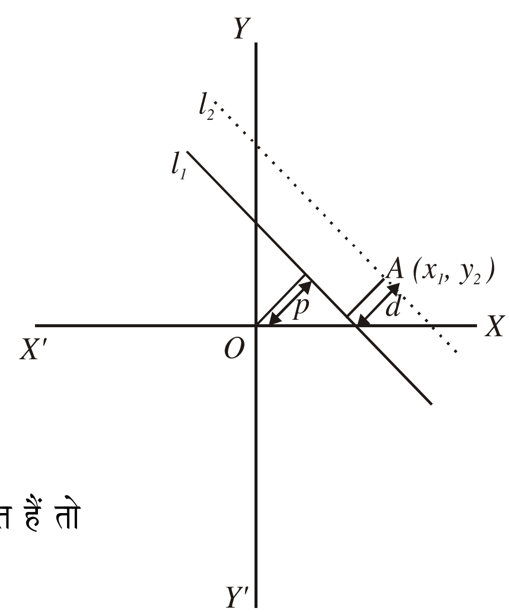
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$$ होता है।

सरल रेखा पर किसी बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई

रेखा l_1 का लम्ब रूप समीकरण :

$$l_1 : x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$$

माना बिन्दु $A(x_1, y_1)$ से रेखा l_1 की दूरी d है। बिन्दु (x_1, y_1) से जाने वाली रेखा l_1 के समान्तर रेखा l_2 खीचीं।



$$l_2 : x \cos\alpha + y \sin\alpha = p + d$$

बिन्दु (x_1, y_1) रेखा l_2 पर स्थित है

अतः $l_2 : x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha = p + d$

$\Rightarrow \quad d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p \;......\; (1)$

यदि बिन्दु A तथा मूल बिन्दु रेखा l_1 के एक ही ओर स्थित हैं तो

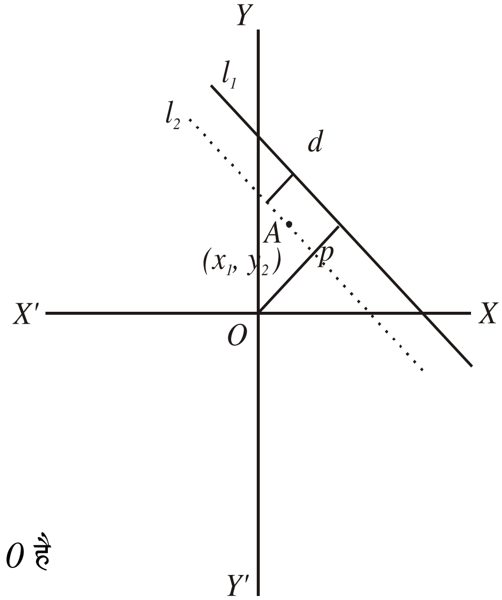
$$l_1 : x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$$

$l_2 : x \cos \alpha + y \sin \alpha = p - d$

बिन्दु (x_1 , y_1) रेखा l_2 पर स्थित है

अतः $l_2 : x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p - d$

$\Rightarrow \quad d = p - x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha$ ...... (2)



अतः किसी रेखा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ पर बाह्य बिन्दु (x_1, y_1) से डाले गये लम्ब (d) की लम्बाई का सूत्र

$$d = \pm [p - (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)]$$

$$d = \pm (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p)$$

पुनः माना रेखा l_1 का व्यापक समीकरण $ax + by + c = 0$ है तो इसे लम्ब रूप में परिवर्तित करने परः

$$l_1 : \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

$$(l_1 : x \cos\alpha + y \sin\alpha + p = 0)$$

इस रेखा l_1 पर बिन्दु (x_1, y_1) से डाले गये लम्ब d का माप :

$$d = \pm \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की माप

$$d = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ होता है

उदाहरण - बिन्दु $(-3, -4)$ से रेखा $12 (x + 6) = 5 (y - 2)$ पर डाले गये लम्ब की माप ज्ञात करो।

हल - दी गई रेखा $12x - 5y + 82 = 0$ .... (1)

बिन्दु $(-3, -4)$ से रेखा (1) पर डाले गये लम्ब की माप

$$= \frac{12(-3) - 5(-4) + 82}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$$

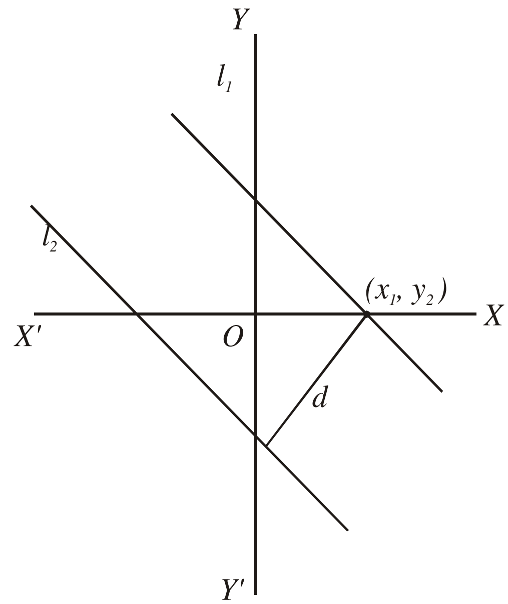
$$= \frac{-36 + 20 + 82}{13}$$

$$= \frac{66}{13} = 5\frac{1}{13}$$ इकाई (लम्ब सदैव धनात्मक होगा)

दो समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी ज्ञात करना

किन्हीं दो समान्तर रेखाओं के मध्य की दूरी ज्ञात करने का आसान तरीका यह है कि किसी एक सरल रेखा x-अक्ष अथवा y-अक्ष से कटान बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कर लेते हैं।

इस ज्ञात निर्देशांक से दूसरी रेखा पर लम्बवत दूरी उपर्युक्त वर्णित सूत्र से ज्ञात की जा सकती है।



उदाहरण - समान्तर रेखाओं $15x + 8y - 34 = 0$ और $15x + 8y + 31 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल - रेखा $15x + 8y + 31 = 0$ में $x = 0$ रखने पर

$$15 \times 0 + 8y + 31 = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{31}{8}$$

अर्थात् रेखा y-अक्ष को $\left(0, -\frac{31}{8}\right)$ पर काटती है। इस बिन्दु से दी गई रेखा $15x + 8y - 34 = 0$ की दूरी (p) होगी।

$$p = \frac{15\times0+8\times\left(-\frac{31}{8}\right)-34}{\sqrt{15^2+8^2}}$$

$$= \frac{-65}{17}$$

अतः दोनों समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी $= \frac{65}{17}$ इकाई

मूल्यांकन

➢ उन सरल रेखाओं के समीकरण प्राप्त कीजिए जो बिन्दु $(3, -4)$ से गुजरती हैं तथा क्रमशः x-अक्ष के समान्तर एवं लम्बवत हैं। $(y + 4 = 0, x = 3)$

➢ उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान कोण बनाती है तथा y-अक्ष पर $-\frac{3}{5}$ का अन्तः खण्ड काटती है। $\left(y = x - \frac{3}{5}\right.$ या $\left.5x - 5y = 3\right)$

➢ उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जिसका अक्षों के मध्य का भाग बिन्दु $(-4, 3)$पर 5 : 3 के अनुपात में विभाजित होता है।
$(20y - 9x = 96)$

➢ बिन्दुओं $(1, 3)$ तथा $(2, 7)$ से गुजरने वाली रेखा के लम्बवत उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(-4, -3)$ से गुजरती है। $(x + 4y + 16 = 0)$

➢ बिन्दु $(-3, -4)$ से रेखा $12(x + 6) = 5(y - 2)$ की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

($\frac{66}{13}$ इकाई)

➢ सरल रेखाओं $2x - 3y + 5 = 0$ तथा $7x + 4y = 3$ के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

$\left(-\frac{11}{29}, \frac{41}{29}\right)$

➢ रेखाओं $5x - 2y + 14 = 0$ तथा $2y = 8 - 7x$ के प्रतिच्छेद बिन्दु एवं बिन्दु $(2, -6)$से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। $(47x + 10y = 34)$

➢ रेखाओं $x - 4y = 3$ तथा $6x - y = 11$ के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए। $\left(\tan^{-1}\frac{23}{10}\right)$

➢ समान्तर रेखाओं $4x + 3y + 8 = 0$ तथा $4x + 3y - 15 = 0$ के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।

($\frac{-23}{5}$ इकाई)

इकाई 12 मेंसुरेशन

अध्याय 28. लम्ब वृत्तीय बेलन

उद्देश्य

- लम्ब वृत्तीय बेलन से परिचित कराना।
- लम्ब वृत्तीय बेलन के वक्रपृष्ठ, सम्पूर्ण पृष्ठ और आयतन का बोध कराना।
- खोखले बेलन के वक्रपृष्ठ, सम्पूर्ण पृष्ठ और आयतन से परिचित कराना।

शिक्षण बिन्दु

- लम्ब वृत्तीय बेलन
- लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्रपृष्ठ
- लम्ब वृत्तीय बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ
- लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन
- खोखले बेलन का वक्र पृष्ठ, सम्पूर्ण पृष्ठ तथा आयतन

प्रस्तुतीकरण :

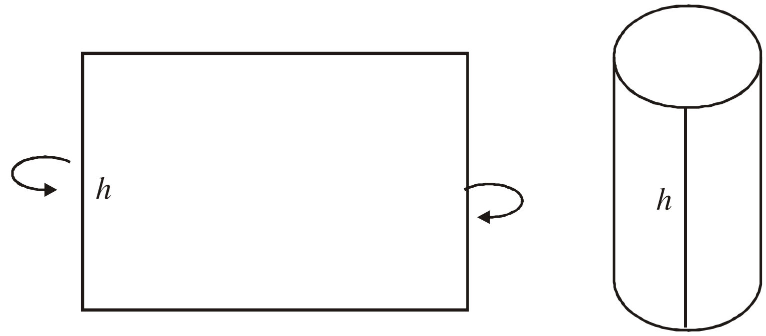
शिक्षक शिक्षार्थियों का ध्यान इस ओर आकृष्ट करायें कि आप ने अपनी पूर्व कक्षा में बेलन पढ़ा है। इसे और बोधगम्य बनाने हेतु निम्नांकित प्रकार से भी स्पष्ट करें कि यदि हम कागज की अनेक वृत्ताकार सर्वांगसम चकतियाँ लें और उन्हें चित्रानुसार एक दूसरे के ऊपर उर्ध्वाधर रखें तो हमें एक आकृति प्राप्त होती है। इस आकृति को लम्ब वृत्तीय बेलन कहते हैं। इसका कारण स्पष्ट है कि आधार वृत्ताकार है, और वृत्ताकार चकतियाँ एक दूसरे के ऊपर लम्बवत् रखी गई हैं।

यह भी स्पष्ट करें कि चकतियों को परस्पर एक दूसरे के ऊपर कुछ तिरछा करके रखने पर लम्बृत्तीय बेलन प्राप्त नहीं होता है। चित्र में दर्शाया गया है। बेलन लम्बवृत्तीय बेलन नहीं हैं।

यहाँ हम केवल लम्बवृत्तीय बेलनों का ही अध्ययन करेंगे। अतः जब तक अन्यथा न कहा जाय, ''बेलन'' से हमारा तात्पर्य लम्ब वृत्तीय बेलन से होगा।

लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्रपृष्ठ

आप ने जो बेलन बनाया है, बताइए कि इस बेलन में कितने तल हैं ? देखिए, इसमें कुल तीन तल हैं। इन तीन तलों में दो समतल हैं और एक वक्रतल है। इस वक्रतल को वक्र पृष्ठ हैं। यदि किसी बेलन को रंगीन कागज से ढकना हो, तो ढकने के लिए कितना न्यूतम कागज लगेगा, इसे कैसे ज्ञात करेंगे ? इसके लिए कागज की एक आयताकार शीट ऐसी लीजिए जिसकी लम्बाई इतनी हो कि कागज बेलन के चारों ओर केवल एक बार घूम जाए और उसकी चौड़ाई बेलन की ऊँचाई के बराबर हो, जैसा कि निम्नांकित चित्र में दर्शाया गया है।



इस शीट का क्षेत्रफल ही बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल होगा। देखिए, शीट की लम्बाई बेलन के आधार की परिधि के बराबर है। यदि बेलन के आधार की त्रिज्या r हो तो परिधि $2\pi r$ होगी। यह भी स्पष्ट करें कि आयताकार कागज की चौड़ाई, बेलन की ऊँचाई h के बराबर है।

अतः बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयताकार शीट का क्षेत्रफल

= लम्बाई × चौड़ाई

= बेलन के आधार का परिमाप × ऊँचाई

= बेलन के आधार की परिधि × ऊँचाई

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi r h$

इसलिए बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

यह भी स्पष्ट करें कि इसका मात्रक वर्ग मात्रक है।

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ

यदि बेलन के ऊपरी और निचले तलों को भी ढकना हो, तो हमें आधार के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल के दो वृत्तों की और आवश्यकता पड़ेगी। जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r होगी और क्षेत्रफल πr^2 होगा।

इससे स्पष्ट करें कि बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ उसके तीनों तलों (एक वक्र तल तथा दो वृत्ताकार समतल) का योग होता है। अतः इसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल समस्त तलों के क्षेत्रफलों का योगफल होता है।

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

स्पष्ट करें कि इसका भी मात्रक वर्ग मात्रक ही है। यह भी ध्यान दिलायें कि π एक अपरिमेय संख्या है। इसलिए, π का एक असांत और अनावर्ती दशमलव निरूपण होता है। परन्तु जब हम इसका मान अपने परिकलनों में प्रयोग करते हैं, तो प्रायः यह मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 के बराबर होते हैं। जो इसका निकटतम मान है।

उदाहरण 1 - एक रोलर का व्यास 84 सेमी है और लम्बाई 120 सेमी है। एक खेल के मैदान को एक बार समतल करने के लिए 500 चक्कर लगाने पड़ते हैं। खेल के मैदान का क्षेत्रफल मी^{2} में ज्ञात कीजिए। $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

हल : रोलर, एक चक्कर में अपने वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर मैदान को समतल करेगा। देखिए, इस प्रश्न में,

रोलर का व्यास = 84 सेमी

अतः त्रिज्या $(r) = \frac{84}{2}$ सेमी

$= 42$ सेमी

$= \frac{42}{100}$ मी

रोलर की लम्बाई (h) = 120 सेमी

$= \frac{120}{100}$ मी

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2\times\frac{22}{7}\times\frac{42}{100}\times\frac{120}{100}$

$= \frac{2\times22\times3\times3}{25\times5}$

$= \frac{396}{25\times5}$ मी^{2}

$\therefore$ एक चक्कर में समतल करने वाले मैदान का क्षेत्रफल $= \frac{396}{25\times5}$ मी^{2}

$\therefore$ 500 चक्कर में समतल करने वाले मैदान का क्षेत्रफल $= \dfrac{396 \times 500}{25 \times 5}$

$= 1584$ मी^{2}

उदाहरण 2 - खाद्यान्नों को सुरक्षित रखने के लिए धातु की चादर से 1 मी ऊँची और 140 सेमी व्यास के आधार वाली 5 बंद बेलनाकार टंकियों बनाई जानी है। इस कार्य के लिए कितने वर्ग मीटर चादर की आवश्यकता होगी। $\pi = \dfrac{22}{7}$ लीजिए।

हल - बन्द बेलनाकार टंकी बनाने के लिए उनके सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल के चादर की आवश्यकता होगी। बेलन की ऊँचाई $=1$ मी, त्रिज्या $= \dfrac{140}{2}$ सेमी $= 70$ सेमी

$= \dfrac{70}{100}$ मी^{2} $= \dfrac{7}{10}$ मी^{2}

अतः एक टंकी का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(h + r)$

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times \dfrac{7}{10}\left(1 + \dfrac{7}{10}\right)$ मी^{2}

$= \dfrac{22}{5} \times \dfrac{17}{10}$ मी^{2}

$= \dfrac{187}{25}$ मी^{2}

इसलिए 5 टंकियों का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \dfrac{187}{25} \times 5$ मी^{2}

$= \dfrac{187}{5}$ मी^{2}

$= 37.4$ मी^{2}

अतः पाँच बेलनाकार टंकियाँ बनाने के लिए 37.4 मी^{2} चादर की आवश्यकता होगी।

बेलन का आयतन

आप पिछली कक्षाओं में, कुछ आकृतियों *(वस्तुओं)* के आयतनों के बारे में पहले ही पढ़ चुके हैं। आपको याद होगा कि ठोस वस्तु स्थान घेरती है। इस घेरे गये स्थान के माप को उस वस्तु का आयतन कहते हैं।

यहाँ हम बेलन के आयतन की चर्चा करेंगे।

आपने अनेकों वृत्ताकार सर्वांगसम चकतियाँ एक दूसरे के ऊपर उर्ध्वाधर लम्बवत रखकर बेलन बनाया है। इस बेलन का आयतन प्रत्येक चकतियाँ द्वारा घेरे गये आयतनों का योग होगा।

स्पष्ट करें कि यदि इस बेलन के आधार का क्षेत्रफल A है तथा ऊँचाई h है,

तो इसका आयतन $v = A \times h$

$= \pi r^2 \times h$ (यहाँ $A = \pi r^2$ क्यों ?)

$= \pi r^2 h$

यहाँ r बेलन के आधार की त्रिज्या है।

उदाहरण 3 - एक जिले की न्यायालय में वकीलों के बैठने के लिए कंक्रीट मिश्रण से बेलनाकार खम्भों पर एक छत तैयार की गई है। प्रत्येक खम्भे का आधार 20 सेमी त्रिज्या का वृत्तीय क्षेत्र तथा ऊँचाई 5 मीटर है, बताइए सभी खम्भों को बनाने में कितना कंक्रीट मिश्रण लगा होगा?

हल - चूँकि कंक्रीट मिश्रण जिससे खम्भा बना है, उस पूरे खम्भे के स्थान को भर दिया है, अतः हमें बेलनों के आयतनों को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

बेलन के आधार की त्रिज्या = 20 सेमी

$$= \frac{20}{100} \text{ मी}$$

$$= \frac{1}{5} \text{ मी}$$

खम्भे की ऊँचाई = 5 मीटर

अतः एक खम्भे का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 5 \text{ मी}^3$$

$$= \frac{22}{35} \text{ मी}^3$$

इसलिए 84 खम्भों का आयतन = $\frac{22}{35} \times 84$ मी^{3}

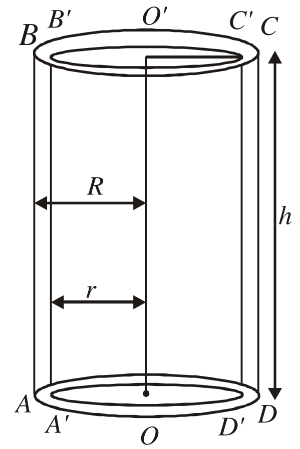
$$= \frac{264}{5} \text{ मी}^3$$

$$= 52.8 \text{ मी}^3$$

अतः 84 खम्भों को बनाने में 52.8 मी^{3} कंक्रीट मिश्रण लगा होगा।

खोखले बेलन का वक्रपृष्ठ, सम्पूर्ण पृष्ठ तथा आयतन

शिक्षक शिक्षार्थियों को यह बोध करायें कि अभी तक हमने ठोस बेलन के आयतन, वक्रपृष्ठ एवं सम्पूर्ण पृष्ठ का अध्ययन किया है। आपने व्यवहार में ऐसे भी बेलन देखें होंगे जो खोखले हैं, जैसे धातुओं और प्लास्टिक के पाइप, ट्यूब आदि।



शिक्षार्थियों से उनकी उत्तर पुस्तिका पर निम्नांकित चित्र बनाने को कहें। देखिए यहाँ बेलन के वृत्ताकार तलों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा OO', है। इसे बेलन का अक्ष कहते हैं। यहाँ यह भी स्पष्ट करें कि चित्र में OO' दो बेलनों $ABCD$ और $A'B'C'D'$ का समाक्ष या उभयनिष्ठ अक्ष *(Common axis)* है। दोनों बेलनों की ऊँचाई एक समान h है।

यह भी देखें कि दोनों बेलनों के बीच कुछ बेलनाकार ठोस है, इसे खोखला बेलन कहते हैं। निष्कर्ष निकलवायें कि

''समान ऊँचाई तथा भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के दो समाक्ष *(Common Axis)* बेलनों से घिरे ठोस को खोखला बेलन कहते हैं।''

खोखले बेलन का वक्रपृष्ठ - चित्र में खोखले बेलन के दोनों वक्रपृष्ठ से परिचित करायें। देखें खोखले बेलन में दो वक्र तल हैं। एक बाहरी वक्र तल और दूसरा आन्तरिक वक्रतल। इन दोनों तलों के क्षेत्रफलों के योग को खोखले बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल कहते हैं। यदि बेलन की ऊँचाई h, बाह्य बेलन की त्रिज्या R तथा आन्तरिक बेलन की त्रिज्या r मान लें तो खोखले बेलन का वक्रपृष्ट = बाहरी वक्रपृष्ठ + आन्तरिक वक्रपृष्ठ

$$= 2\pi Rh + 2\pi rh$$

$$= 2\pi (R + r) h$$

खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ - खोखले बेलन में देखें कुल चार तल हैं। दो वक्रतल तथा दो समतल (वृत्ताकार वलय) इन सभी तलों के क्षेत्रफलों का योग खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल है।

खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = वक्र पृष्ठ + 2 × आधार पर वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल

$$= 2\pi (R + r) h + 2(\pi R^2 - \pi r^2)$$

$$= 2\pi (R + r) h + 2\pi (R^2 - r^2)$$

$$= 2\pi (R + r) h + 2\pi (R + r) (R - r)$$

$$= 2\pi (R + r) (h + R - r)$$

खोखले बेलन का आयतन

चित्र से स्पष्ट करायें कि खोखले बेलन का आयतन, बाहरी एवं आन्तरिक बेलन के आयतनों का अन्तर होगा।

अतः खोखले बेलन का आयतन = बाहरी बेलन का आयतन – भीतरी बेलन का आयतन

$= \pi R^2 h - \pi\ r^2 h$

$= \pi (R^2 - \ r^2)\ h$

जहाँ R बेलन की त्रिज्या, r आन्तरिक बेलन की त्रिज्या और h बेलन की ऊँचाई है।

उदाहरण 4 - आभूषणों के वर्कशाप में, पीतल की एक बेलनाकार खोखली नली 21 सेमी लम्बी है। इसके बाह्य और आन्तरिक ब्यास क्रमशः 10 सेमी और 6सेमी हैं। यदि 1 घन सेमी पीतल का द्रव्यमान 10 ग्राम हो तो नली में कुल कितने किलोग्राम धातु लगी है। $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

हल - स्पष्ट करें कि इस प्रश्न को हल करने के लिए खोखले बेलन का आयतन ज्ञात करना होगा।

खोखले बेलन की बाहरी त्रिज्या $R = \frac{10}{2}$ सेमी

$= 5$ सेमी

खोखले बेलन की आन्तरिक त्रिज्या $r = \frac{6}{2}$ सेमी

$= 3$ सेमी

खोखले बेलन की ऊँचाई $h = 21$ सेमी

खोखले बेलन का आयतन $= \pi (R^2 - \ r^2)\ h$

$$= \frac{22}{7}(5^2 - 3^2) \times 21$$

$$= \frac{22}{7}(5-3) \times (5+3) \times 21$$

$$= \frac{22}{7} \times 2 \times 8 \times 21$$

$= 1056$ घन सेमी

खोखले बेलन का द्रव्यमान $= 1056 \times 10$ ग्राम

$$= = \frac{1056 \times 10}{1000} \text{ किग्रा}$$

$= 10.56$ किग्रा

अतः खोखले बेलनाकार नली में 10.56 किग्रा. धातु लगी है।

उदाहरण 5 - 14 सेमी लम्बे एक खोखले बेलनाकार धातु के बाह्य और आन्तरिक वक्र पृष्ठों का अन्तर 44 वर्ग सेमी है। यदि पाइप में 99 सेमी^{3} धातु लगी है, तो पाइप की बाह्य और आन्तरिक त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल - मान लिया बेलनाकार धातु की बाह्य त्रिज्या R और आन्तरिक त्रिज्या r है।

अब स्पष्ट करें कि प्रश्न में बाह्य और आन्तरिक पृष्ठों का अन्तर तथा खोखले बेलन का आयतन दिया गया है। इसकी सहायता से दो सम्बन्ध स्थापित करें तथा इनको हल करके त्रिज्या ज्ञात करें। अतः -

बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल – आन्तरिक वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल = 44 सेमी^{2}

या $2\pi R h - 2\pi r h = 44$

या $2\pi (R - r) h = 44$

अतः $2\times\frac{22}{7}\times(R-r)\times 14 = 44$

$$R-r = \frac{44\times 7}{2\times 22\times 14}$$

$$R-r = \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

पुनः पाइप का आयतन = 99 सेमी^{3}

या $2\pi (R^2 - r^2) h = 99$

अतः $\frac{22}{7}(R^2-r^2)\times 14 = 99$

या $R^2-r^2 = \frac{99\times 7}{22\times 14}$

या $R^2-r^2 = \frac{9}{4}$

या $(R-r)(R+r) = \frac{9}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$

समीकरण (1) से $R-r = \frac{1}{2}$ समी (2) में प्रतिस्थापित करने पर

$$(R+r)\times\frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

$$(R+r) = \frac{9\times 2}{4}$$

$$(R+r) = \frac{9}{2} \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

समीकरण (1) और (3) को जोड़ने पर

$$2R = \frac{1}{2}+\frac{9}{2} = \frac{10}{2}$$

$$R = \frac{5}{2} \text{ सेमी}$$

$$= 2.5 \text{ सेमी}$$

यह मान समीकरण 3 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{5}{2}+r = \frac{9}{2}$$

$$r = \frac{9}{2}-\frac{5}{2}$$

$$r = \frac{4}{2}$$

$$r = 2 \text{ सेमी}$$

अतः बाहरी त्रिज्या 2.5 सेमी तथा आन्तरिक त्रिज्या 2 सेमी होगी।

मूल्यांकन

1. निम्नांकित चार विद्यालयों में से केवल एक विकल्प सही है सही विकल्प चुन कर अपनी उत्तर पुस्तिका पर अंकित कीजिए।

अ. 4 सेमी भुजा के घन से,घन की ऊँचाई के बराबर ऊँचाई और व्यास का घन काट कर अलग कर दिया गया है। इस प्रकार अलग किये गये बेलन का आयतन होगा :

क. 64 सेमी^{3} ख. 16π सेमी^{3} ग. 8π सेमी^{3} घ. 96 सेमी^{3}

ब. 30 सेमी × 12 सेमी के एक आयताकार कागज को लम्बाई के परितः घुमाने पर स्पेश *(*आकाश*)* में बने बेलन का व्यास होगा :

क. 12 सेमी ख. 24 सेमी ग. 30 सेमी घ. इनमें से कोई नहीं

स. एक बेलन के आधार की त्रिज्या 7 सेमी और ऊँचाई 3 सेमी है। उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा -

क. 132 सेमी^{2} ख. 220 सेमी^{2} ग. 1232 सेमी^{2} घ. 440 सेमी^{2}

द. दो समान आधान वाले बेलनों की ऊँचाई में 2 : 5 का अनुपात है। इनके वक्रपृष्ठों में अनुपात होगा-

क. 2 : 5 ख. 5 : 2 ग. 3 : 2 घ. 2 : 3

2. 22 सेमी लम्बा और 12 सेमी चौड़ा आयतीय कागज को दो प्रकार से मोड़ कर दो विभिन्न वृत्तीय

बेलनों का पृष्ठ बन सकता है। इस प्रकार जो बेलन बने उनके

अ. आयतनों तथा

ब. सम्पूर्ण पृष्ठों में अन्तर ज्ञात कीजिए।

3. 1 सेमी व्यास तथा 5 सेमी लम्बे चांदी के बेलनाकार टुकड़े से 1 मिमी व्यास के खींचे गये बेलनाकार तार की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

4. एक बेलनाकार बर्तन जिसकी आन्तरिक त्रिज्या 42 सेमी है। इसमें अंशतः इतना पानी भरा है कि इसमें 24 सेमी × 21 सेमी × 11 सेमी बिमाओं वाला एक घनाभ पूर्णतः डूब जाय। इसे पूर्णतः डुबोने पर पानी का तल कितनी ऊँचाई तक उठ जायेगा।

प्रोजेक्ट कार्य

28 × 42 सेमी माप के दो मोटे कागज लेकर लम्बाई और चौड़ाई कि दिशा में मोड़ कर दो अलग-अलग बेलन बनवायें। दोनों बेलनों की परिमाप *(*परिधि*)* नाप कर त्रिज्या ज्ञात करायें। तथा इनके वक्रपृष्ठों एवं आयतनों का अन्तर ज्ञात करायें।

अध्याय 29 - लम्ब वृत्तीय शंकु

उद्देश्य -

- लम्ब वृत्तीय शंकु से परिचित कराना।
- लम्ब वृत्तीय शंकु के तिर्यक पृष्ठ, सम्पूर्ण पृष्ठ और आयतन का बोध कराना

शिक्षण बिन्दु

- लम्ब वृत्तीय शंकु
- लम्ब वृत्तीय शंकु का तिर्यक पृष्ठ और सम्पूर्ण पृष्ठ
- लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन

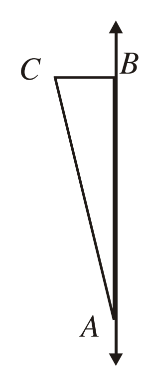
लम्ब वृत्तीय शंकु

प्रस्तुतीकरण

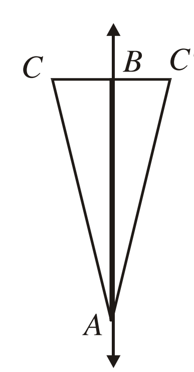
शिक्षार्थियों को यह ध्यान दिलाते हुए कि आपने पिछली कक्षाओं में शंकु का अध्ययन किया है, निम्नांकित क्रिया कलाप करने को कहें।

क्रिया कलाप

एक मोटे कागज पर, समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिसका कोण B समकोण हो और उसे काट कर अलग कर लीजिए। दोनों लम्ब भुजाओं में से किसी एक जैसे AB के अनुदिश एक लम्बा और मोटा धागा चिपकाइए। देखिए चित्र (1) धागे को दोनों हाथों से त्रिभुज के दोनों और तान कर पकड़े हुए, त्रिभुज को धागे के अनुदिश कई बार घुमाइए, देखिए। जब त्रिभुज धागे के परितः घूम रहा है तो वह एक त्रिविमीय आकृति बना रहा है। (2)इस आकृति से आप पूर्व में परिचित हैं। इसे लम्ब वृत्तीय शंकु कहते हैं।



चित्र (1)

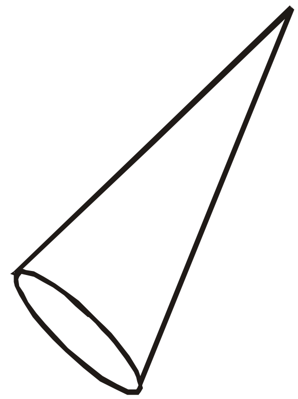


चित्र (2)

चित्र (2) में बिन्दु A, इस लम्ब वृत्तीय शंकु का शीर्ष, BC आधार की त्रिज्या, AC इस शंकु की तिरछी ऊँचाई, AB शंकु की ऊँचाई, बिन्दु B आधार

का केन्द्र है। शंकु की ऊँचाई, त्रिज्या और तिरछी ऊँचाई को क्रमशः h, r और l से निरूपित करते हैं।

चित्र (3) को देख कर बतायें कि क्या यह लम्ब वृत्तीय शंकु है ? इसे लम्ब वृत्तीय शंकु नहीं कह सकते, इस शंकु में शीर्ष को आधार से मिलाने वाली रेखा, आधार पर लम्ब नहीं होगी। यह भी स्पष्ट करें कि जिस शंकु का आधार वृत्त नहीं है, वह भी लम्ब वृत्तीय शंकु नहीं है। यहाँ यह भी बतायें कि शंकु से हमार तात्पर्य लम्ब वृत्तीय शंकु से ही होगा।



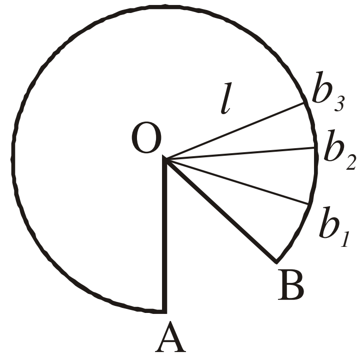
चित्र (3)

लम्ब वृत्तीय शंकु का तिर्यक पृष्ठ तथा सम्पूर्ण पृष्ठ

शिक्षार्थियों से निम्नांकित क्रिया कलाप करने को कहें

क्रिया कलाप

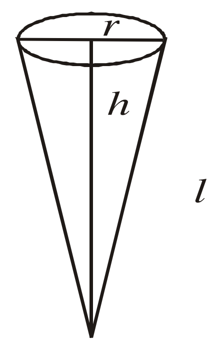
एक शंकु लीजिए। देखिए शंकु में दो पृष्ठ हैं, एक पृष्ठ वक्र तथा दूसरा पृष्ठ, समतल है। इसके वक्र पृष्ठ पर साफ, मोटा कागज इस प्रकार लपेटिये कि एक फेरे में, वक्र पृष्ठ पूरा-पूरा ढंक जाय। कागज को खोलकर देखिए, तो यह निम्नांकित चित्र की भाँति दिखाई देगा। शिक्षक स्पष्ट करें कि चित्र में अंकित भुजा OA या OB शंकु की तिरछी ऊँचाई l है।



यदि आकृति में दिये गये कागज को O से जाती हुई रेखाओं द्वारा अनेकों छोटे-छोटे टुकड़ों में विभाजित कर लिया जाय, तो वे कटे हुए भाग लगभग त्रिभुज के आकारों के हैं और इनमें से प्रत्येक की ऊँचाई l के बराबर है तथा मान लिया इनके आधार चित्रानुसार क्रमशः b_1, b_2, b_3...... आदि हैं।

अब प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × प्रत्येक भुजा का आधार × l

अतः पूरे कागज का क्षेत्रफल = सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग



$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + ...$$

$$= \frac{1}{2}l\,(b_1 + b_2 + b_3 + ...)$$

$= \frac{1}{2}l$ (आकृति 3 की पूरी वक्रित परिसीमा की लम्बाई)

देखिए $b_1 + b_2 + b_3 + ...$ मिलकर इस आकृति के वक्रित भाग को बनाते हैं। परन्तु इस बक्रित भाग से शंकु के आधार की परिधि बनती है। साथ ही इस आधार की परिधि = $2\pi r$ जहाँ r आधार की त्रिज्या है।

इसलिए, शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r$

$$= \pi r l$$

यहाँ यह ध्यान दिलायें कि चित्र (4) से पाइथागोरस प्रमेय $l^2 = h^2 + r^2$ द्वारा जहाँ h शंकु की ऊँचाई है।

अतः $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ होगा

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ

आप जानते हैं कि शंकु में दो तल है। एक वक्रतल और दूसरा समतल जो वृत्ताकार है। दोनों तल मिलकर इसका सम्पूर्ण पृष्ठ बनाते हैं।

अतः शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल + वृत्ताकार तल का क्षेत्रफल

$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r (l + r)$$

उदाहरण 1 - एक शंकु की ऊचाई 12 सेमी है और इसके आधार का व्यास 10 सेमी है। इस शंकु का वक्रपृष्ठीय तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\pi = 3.14$ लीजिए।

हल - यहाँ ऊँचाई $h = 12$ सेमी और त्रिज्या $r = \frac{10}{2} = 5$ सेमी है।

अतः $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ से

$$l = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

= 13 सेमी

इसलिए वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi r l$$

$$= 3.14 \times 5 \times 13$$

= 204.10 सेमी^{2}

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi r (l + r)$$

$$= 3.14 \times 5 \times (13 + 5)$$

$$= 3.14 \times 5 \times 18$$

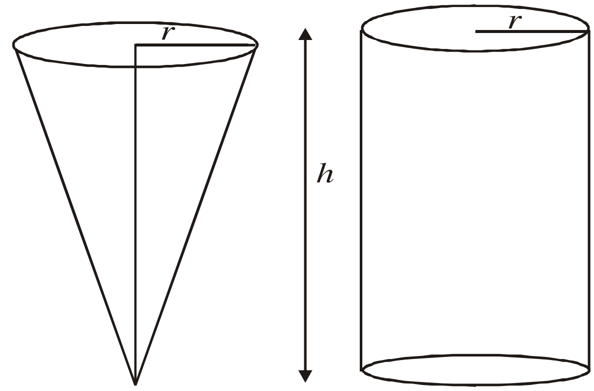
= 282.60 सेमी^{2}

अतः वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल = 204.10 सेमी^{2} तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 282.60 सेमी^{2} होगा।

लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन

शिक्षक, शिक्षार्थियों को ध्यान दिलाएं कि आपने पिछली कक्षा में शंकु का आयतन पढ़ा है, इसे और बोध गम्य बनाने हेतु निम्नांकित क्रिया कलाप करने को कहें।

क्रिया कलापः



निम्नांकित आकृति की भाँति एक ही आधार त्रिज्या और एक ही ऊँचाई वाला एक आधार सहित खोखला बेलन और एक खोखला शंकु लीजिए।

शंकु को रेत से पूरा भरिये, और इस रेत को बेलन में डालिए, देखिए इस रेत से बेलन का कुछ भाग भर जायेगा। यही प्रक्रिया दो बार और कीजिए, अब देखिए बेलन रेत से पूरा भर गया है।

इससे निष्कर्ष निकलवायें कि तीन शंकुओं का आयतन बेलन के आयतन के बराबर है। इसका अर्थ है कि यदि शंकु और बेलन की आधार त्रिज्या एक ही हो और ऊँचाई भी एक ही हो, तो शंकु का आयतन बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है।

अतः शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}$ बेलन का आयतन

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

उदाहरण : शंकु के आकार के उस बर्तन की लीटरों में धारिता ज्ञात कीजिए। जिसकी त्रिज्या 7 सेमी और तिर्यक ऊँचाई 25 सेमी है।

हलः शिक्षार्थियों को स्पष्ट करें कि किसी वस्तु की धारिता उस वस्तु के अभ्यंतर में (अंदर) भरे जा सकने वाले द्रव (या अन्य वस्तु) का आयतन है। इसलिए यहाँ हम बर्तन का आयतन ज्ञात करेंगे।

यहा शंकु के आधार की त्रिज्या $r = 7$ सेमी

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = 25$ सेमी है।

अतः $l^2 = h^2 + r^2$ से

$h^2 = l^2 - r^2$

$= \sqrt{25^2 - 7^2}$

$= 24$ सेमी

आयतन $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^2 \times 24$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$

1232 सेमी^{3}

1000 सेमी^{3} =1 लीटर

1232 सेमी^{3} $= \frac{1232}{1000}$ लीटर

1.232 लीटर

अतः शंकु के आकार के बर्तन की धारिता 1.232 लीटर है।

मूल्यांकन

1. निम्नांकित प्रश्नों के चार वैकल्पिक उत्तर दिये गये हैं, उनमें केवल एक उत्तर सही है, सही उत्तर चुनकर उत्तर पुस्तिका पर अंकित कीजिए -

अ. समकोण त्रिभुज को आधार या लम्ब के परितः घुमाने पर जो ठोस प्राप्त होगा वह है -

क. बेलन   ख. प्रिज्म जिसका आधार त्रिभुज होगा

ग. शंकु   घ. गोला

ब. एक शंकु के आधार की त्रिज्या 3 सेमी, ऊँचाई 4 सेमी है। इस शंकु की तिर्यक ऊँचाई होगी -

क. 5 सेमी ख. 3 सेमी ग. 4 सेमी घ. इनमें कोई नहीं।

2. भुजाओं 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी वाले एक समकोण त्रिभुज को भुजा 12 सेमी के परितः घुमाने पर, बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

3. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आधार-त्रिज्या तथा वक्रपृष्ठ क्रमशः 3 सेमी तथा 15 π सेमी^{2} है। शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

4. एक लम्ब वृत्तीय शंकु एवं बेलन, दोनों के आधार की त्रिज्या 5 सेमी तथा ऊँचाई 12 सेमी हो तो शंकु एवं बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. किसी लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई उसके आधार की त्रिज्या के बराबर है तथा उसका आयतन 9 π सेमी^{3} है। शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

अध्याय 30 गोला

उद्देश्य

- गोले से परिचित कराना
- गोले के पृष्ठ से परिचित कराना।
- अर्ध गोले के वक्रपृष्ठ और सम्पूर्ण पृष्ठ का बोध कराना।
- गोले और अर्ध गोले के आयतन का बोध कराना।
- गोलीय कोश से परिचित कराना।
- गोलीय तथा अर्ध गोलीय कोश का वक्रपृष्ठ, सम्पूर्ण पृष्ठ तथा आयतन का बोध कराना।

शिक्षण बिन्दु

- गोला
- गोले का पृष्ठ
- अर्ध गोले का वक्रपृष्ठ एवं सम्पूर्ण पृष्ठ
- समतल परिच्छेद और उसकी त्रिज्या
- गोले और अर्ध गोले का आयतन
- गोलीय कोश
- गोलीय कोश का सम्पूर्ण पृष्ठ
- अर्ध गोलीय कोश का वक्रपृष्ठ तथा सम्पूर्ण पृष्ठ
- अर्ध गोलीय कोश का आयतन

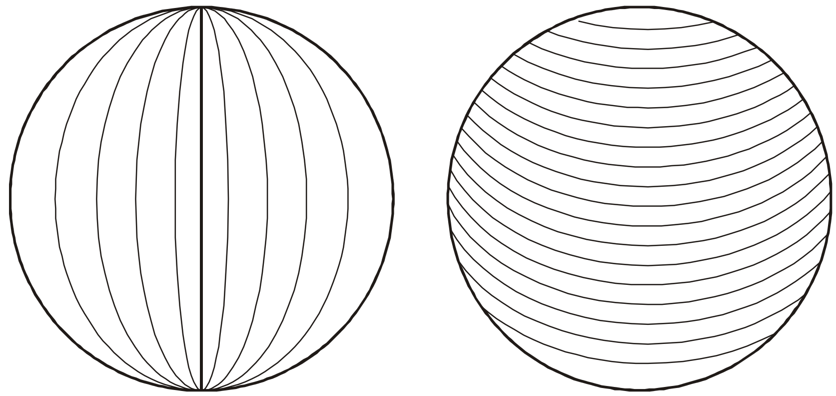
गोला

प्रस्तुतीकरण

आप गेंद, क्रिकेट बाल, बाली बाल, फुटबाल, कंचों, गोल छर्रों आदि को देखा है। ये सभी आकृतियाँ गोलाकार हैं। ज्यामिति में हम इन्हें गोला कहते हैं।

क्रियाकलाप

एक सादे मोटे कागज पर किसीं भी त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इसका केन्द्र निर्धारित कीजिए तथा व्यास खींचिए। वृत्त को काट कर कागज से अलग कीजिए। इसे वृत्ताकार चकती *(disc)* कहते हैं। इस वृत्ताकार चकती के एक व्यास के अनुदिश एक डोरी चिपकाइए और इसे वैसे ही घुमाइए जैसे आपने पिछले अध्याय में त्रिभुज को घुमाया था, तो आप एक नया ठोस देंखेगें, यह किस वस्तु से मिलता-जुलता है। देखिए यह एक गेंद की भाँति हैं। यह एक गोला कहलाता है।



क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि उस वृत्त के केन्द्र का क्या होता है, जिसे आपने घुमाया है। स्पष्ट करें कि यह गोले का भी केन्द्र हो जाता है। इस प्रकार गोला एक त्रिविमीय आकृति (ठोस आकृति) है, जो आकाश *(space)* में स्थित उन सभी बिन्दुओं से मिलकर बनी है जो एक निश्चित बिन्दु से (जो गोले का केन्द्र कहलाता है) से एक अचर या निश्चित दूरी पर होते हैं (जो गोले की त्रिज्या कहलाती है)

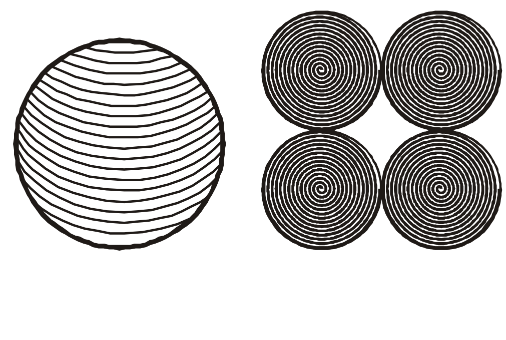
यह भी स्पष्ट करें कि गोला एक गेंद की पृष्ठ की तरह होता है। ठोस गोला उस ठोस के लिए प्रयोग होता है, जिसका पृष्ठ एक गोला है।

गोले का पृष्ठ

क्रिया कलाप

रबर की एक गेंद लीजिए, इसकी सतह (पृष्ठ) पर हाथ फेरिये। देखि, इसमें केवल एक वक्रीय पृष्ठ है। इसे गोले का वक्रपृष्ठ या सम्पूर्ण पृष्ठ या केवल गोले का पृष्ठ कहते हैं। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इसके ऊपर चित्रानुसार एक कील लगाइए। कील की सहायता से उस पर एक डोरी उसी प्रकार से लपेटना प्रारम्भ कीजिए।

जैसे लट्टू नचाने के लिए उस पर डोरी लपेटी जाती है। रस्सी गेंद से हटने न पाये, इसके लिए बीच बीच में पिन लगाते रहिए। डोरी लपेटना तब तक जारी रखिए, जब तक कि पूरी गेंद पर डोरी न लिपट जाए। डोरी पर प्रारम्भिक और अन्तिम बिन्दु अंकित कर लीजिए और धीरे-धीरे गेंद से डोरी को हटा लीजिए। गेंद की ऊँचाई (व्यास) नापिए। उससे आप को गेंद की त्रिज्या ज्ञात हो जायेगी। कागज पर इसी त्रिज्या के बराबर चार वृत्त खींचिए। अब जो डोरी आपने गेंद पर लपेटी थी, उसी को एक-एक करके इन वृत्तों पर चित्रानुसार रखकर वृत्तों को भरिये। इससे निष्कर्ष निकलवायें कि वह डोरी जिसने एक गोले के पृष्ठ को पूरा पूरा ढक लिया था, अब उसी डोरी से गोले की



त्रिज्या वाले चार वृत्त भर रहे हैं। स्पष्ट करें कि r त्रिज्या वाले एक गोलीय पृष्ठ का क्षेत्रफल = त्रिज्या r वाले चार वृत्तों का क्षेत्रफल $= 4\times(\pi r^2)$

अतः गोले का पृष्ठ $= 4\pi r^2$ जहाँ गोले की त्रिज्या r है।

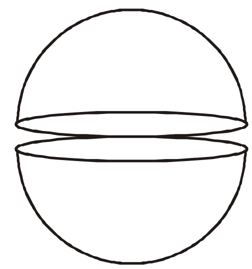
अर्ध गोले का वक्रपृष्ठ

क्रिया कलाप :

एक गोल लड्डू लीजिए। इसे बीचों-बीच से दो भागों में काटिए। देखिए *(लड्डू)* गोला दो बराबर भागों में विभाजित हो गया है। प्रत्येक भाग अर्ध गोला कहलाता है। अर्ध गोले के पृष्ठ के बारे में आप क्या कह सकते हैं ? इसके कितने पृष्ठ हैं ? देखिए, इसके दो पृष्ठ हैं। एक वक्र पृष्ठ तथा दूसरा समतल पृष्ठ। अर्ध गोले का वक्रपृष्ठ, गोले के पृष्ठ का आधा है।

अतः अर्ध गोले का पृष्ठ $= \frac{1}{2}\times 4\pi r^2$

$= 2\pi r^2$ अर्ध जहाँ r की त्रिज्या है।



गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ

= दोनों पृष्ठों के क्षेत्रफलों का योग

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

अतः अर्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 3\pi r^2$ *(r अर्ध गोले की त्रिज्या है)*

उदाहरण 1- 14 सेमी व्यास वाले गोले वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल - गोले की त्रिज्या $= \frac{14}{2}$

= 7 सेमी

वक्रपृष्ठ $= 4\pi r^2$

$= 4\times\frac{22}{7}\times 7\times 7$ सेमी^{2}

= 616 सेमी^{2}

उदाहरण 2- चन्द्रमा का व्यास, पृथ्वी के व्यास का लगभग एक चौथाई है। इन दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल - मान लिया चन्द्रमा का व्यास x सेमी है।

चन्द्रमा की त्रिज्या $\frac{x}{2}$ सेमी होगी।

चन्द्रमा का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$$= \frac{4\pi\times x^2}{4}$$

$$= \pi x^2$$

पृथ्वी का व्यास = $4x$ सेमी

पृथ्वी की त्रिज्या = $2x$ सेमी

पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi(2x)^2$

$$= 4\pi\times 4x^2$$

$$= 16\,\pi x^2$$

$$\frac{\text{चन्द्रमा का पृष्ठीय क्षे०फ०}}{\text{पृथ्वी का पृष्ठीय क्षे०फ०}} = \frac{\pi x^2}{16\pi x^2}$$

चन्द्रमा का पृष्ठीय क्षेत्रफल : पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 1 : 16

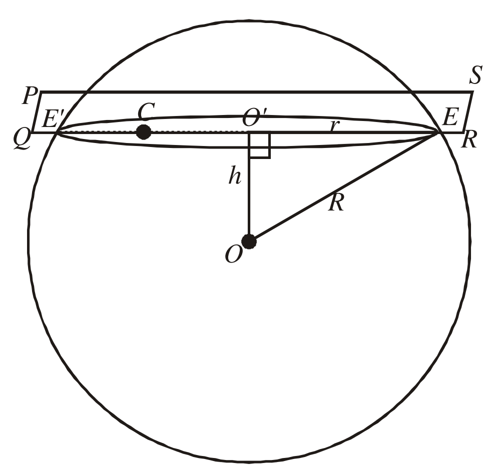
गोले का समतल परिच्छेद और उसकी त्रिज्या

प्रस्तुतीकरण :

एक गोले का रेखाचित्र खींचिए। गोले को एक समतल द्वारा चित्रानुसार काटा हुआ बनायें। कटे भाग को देखिए, इसका एक तल समतल (वृत्ताकार) है। दूसरा तल वक्रतल है। समतल भाग को गोले का समतल परिच्छेद कहते हैं। इसके केन्द्र को समतल परिच्छेद का केन्द्र तथा त्रिज्या को समतल परिच्छेद की त्रिज्या कहते हैं। आपने देखा कि समतल परिच्छेद एक वृत्त है।

मान लिया इसका केन्द्र O' है, तथा गोले का केन्द्र O है।

समतल परिच्छेद की त्रिज्या r, और तथा गोले की त्रिज्या R है। गोले के केन्द्र से समतल परिच्छेद की ऊँचाई h है। चित्र में $O'E = r$, $OE = R$, $OO' = h$ है। ECE' समतल परिच्छेद है। $PQRS$ वह समतल है, जिससे गोले को काटा गया है।



त्रिभुज $OO'E$ में OOE' समकोण है।

अतः $r^2 + h^2 = R^2$

$$r^2 = R^2 - h^2$$

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}$$

अतः समतल परिच्छेद की त्रिज्या = $\sqrt{R^2 - h^2}$

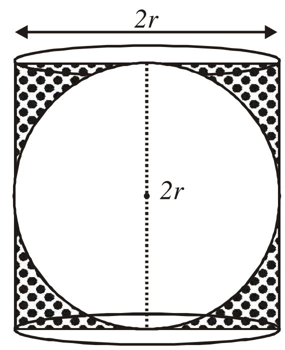
गोले और अर्ध गोले का आयतन

प्रस्तुतीकरण

शिक्षार्थियों से निम्न क्रिया कलाप करने को कहें।

क्रिया कलाप

एक पानी भरा खोखला लम्ब वृत्तीय बेलन लीजिए, जिसकी ऊँचाई उसके भीतरी व्यास के बराबर है। निम्नांकित चित्रानुसार उसमें उसी व्यास का गोला डाल दीजिए। बचे हुए पानी को नाप लीजिए। दूसरी स्थिति में पानी का आयतन और पहली स्थिति में पानी के आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए। देखिए यह अनुपात 1 : 3 है। इससे यह निष्कर्ष निकलवायें कि गोले का आयतन उसके परिगत बेलन के आयतन का दो तिहाई है। इस प्रयोग को अंशाकित सिलिंडर लेकर किया जा सकता है।



अर्थात् गोले का आयतन = $\frac{2}{3}$ × (परिगत बेलन का आयतन)

$$= \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times 2r$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$ (जहाँ r गोले की त्रिज्या है)

अर्ध गोले का आयतन = $\frac{1}{2}$ × गोले का आयतन

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

उदाहरण 1– उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है।

हल – गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$

$1437\frac{1}{3}$ सेमी^{3}

उदाहरण 2- धातु के एक गेंद का व्यास 4.2 सेमी है। यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति सेमी^{3} है, तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल - गेंद की त्रिज्या = $\frac{4.2}{2}$

= 2.1 सेमी

गेंद का आयतन = = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 2.1\times 2.1\times 2.1$$

= 38.808 सेमी^{3}

द्रव्यमान = आयतन × घनत्व

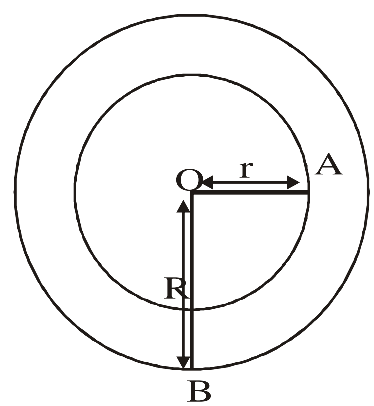
= 38.808 × 8.9 ग्राम

= 345.39 ग्राम (लगभग)

गोलीय कोश

प्रस्तुतीकरण

खोखली गेंद, फुटबाल या बालीबाल को देखिए। ये आकृतियाँ दो संकेन्द्रीय गोलों से सीमाबद्ध हैं। ऐसी आकृतियों को गोलीय कोश कहते हैं। शिक्षक स्पष्ट करें कि दो संकेन्द्रीय गोलों से सीमाबद्ध आकृति को गोलीय कोश कहते हैं। यदि बाहरी गोले की त्रिज्या R और आन्तरिक गोले की त्रिज्या r हो, तो $R - r$ को गोलीय कोश की मोटाई कहते हैं।



गोलीय कोश का आयतन = बाहरी गोले का आयतन - आन्तरिक गोले का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$$

जहाँ R = बाहरी गोले की त्रिज्या

$r =$ आन्तरिक गोले की त्रिज्या

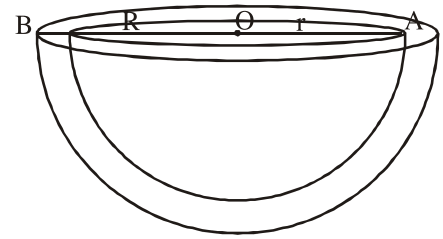
गोलीय कोश का वक्रपृष्ठ = बाहरी गोले का वक्रपृष्ठ + आन्तरिक गोले का वक्रपृष्ठ

$$= 4\pi R^2 + 4\pi r^2$$

$$= 4\pi\left(R^2 + r^2\right)$$

अर्धगोलीय कोश

निम्नांकित आकृति को देखिए। यह गोलीय कोश का आधा भाग है। इसमें तीन तल हैं, दो अर्ध गोलों के वक्रपृष्ठ हैं, तथा तीसरा वृत्ताकार वलय का पृष्ठ है।



अर्ध गोलीय कोश का आयतन = बाहरी अर्ध गोले का आयतन – भीतरी अर्ध गोले का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$$

अर्ध गोलीय कोश का वक्रपृष्ठ = बाहरी अर्ध गोले का वक्रपृष्ठ + आन्तरिक गोले का वक्रपृष्ठ

$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi\left(R^2 + r^2\right)$$

अर्ध गोलीय कोश सम्पूर्ण पृष्ठ = दोनों अर्ध गोलों का वक्रपृष्ठ + वृत्ताकार वलय का पृष्ठ

$$= 2\pi\left(R^2 + r^2\right) + \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

$$= \pi\left(3R^2 + r^2\right)$$

मूल्यांकन -

1. निम्नांकित प्रश्नों के चार वैकल्पिक उत्तर दिये गये हैं, जिनमें केवल एक सही है। सही उत्तर चुनकर उत्तर पुस्तिका पर अंकित कीजिए।

अ. किसी अर्धवृत्त को व्यास के परितः घुमाने पर आकाश *(space)* में घुमाने पर जो आकृति निर्मित होगी, वह है -

क. वृत्त   ख. अर्ध गोला   ग. गोला   घ. कोई आकृति नहीं

ब. π त्रिज्या वाले अर्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ होगा -

क. $4\pi r^2$ ख. πr^2 ग. $2\pi r^2$ घ. $3\pi r^2$

स. एक अर्ध गोलीय प्याले की आन्तरिक और बाह्य त्रिज्याएँ क्रमशः r तथा R हैं। प्याले का वक्रपृष्ठ होगा-

क. $\pi((R^2 + r^2)$ ख. $2\pi(R^2 + r^2)$

ग. $2\pi(R^2 - r^2)$ घ. $2\pi(r^2 - R^2)$

2. एक गोले के व्यास में 25% की कमी हो जाती है। उसका वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल कितने प्रतिशत कम हो जायेगा।

3. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है।

4. किसी धातु के 72 सेमी लम्बे और 4 सेमी आधार-त्रिज्या के बेलन से 12 सेमी व्यास के कितने गोले बनाये जा सकते हैं।

5. एक शंकु एवं एक अर्ध गोला समान आधार के हैं। यदि शंकु और अर्ध गोले की ऊँचाइयों का अनुपात 2 : 1 है, तो उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. एक अर्ध गोलीय कोश की बाहरी और आन्तरिक त्रिज्याएँ क्रमशः 4 सेमी तथा 3 सेमी हैं। इस अर्धगोलीय कोश का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

7. यदि एक गोले को किसी तल से उसके केन्द्र से होते हुए पाँच बार में 16 बराबर भागों में काट दें, तो कटे हुए भागों का सम्पूर्ण पृष्ठ कितना होगा।

प्रोजेक्ट 1 : जनसंख्या अध्ययन में सांख्यिकी की उपयोगिता

उद्देश्य

- जनसंख्या अध्ययन में सांख्यिकी की उपयोगिता

सांख्यिकी का अर्थ

नियोजन का दृढ़ आधार सांख्यिकी है। सांख्यिकी में दिये आँकड़ों का वर्गीकरण करके सारणी में उचित चिन्हों द्वारा लिखते हैं तत्पश्चात इन आँकड़ों का विश्लेषण कर आवश्यकतानुसार परिणाम प्राप्त करते हैं। सांख्यिकी की सहायता से पूर्व योजनाओं की कमियों का पता चलता है तथा भावी नियोजन का मार्ग प्रशस्त होता है।

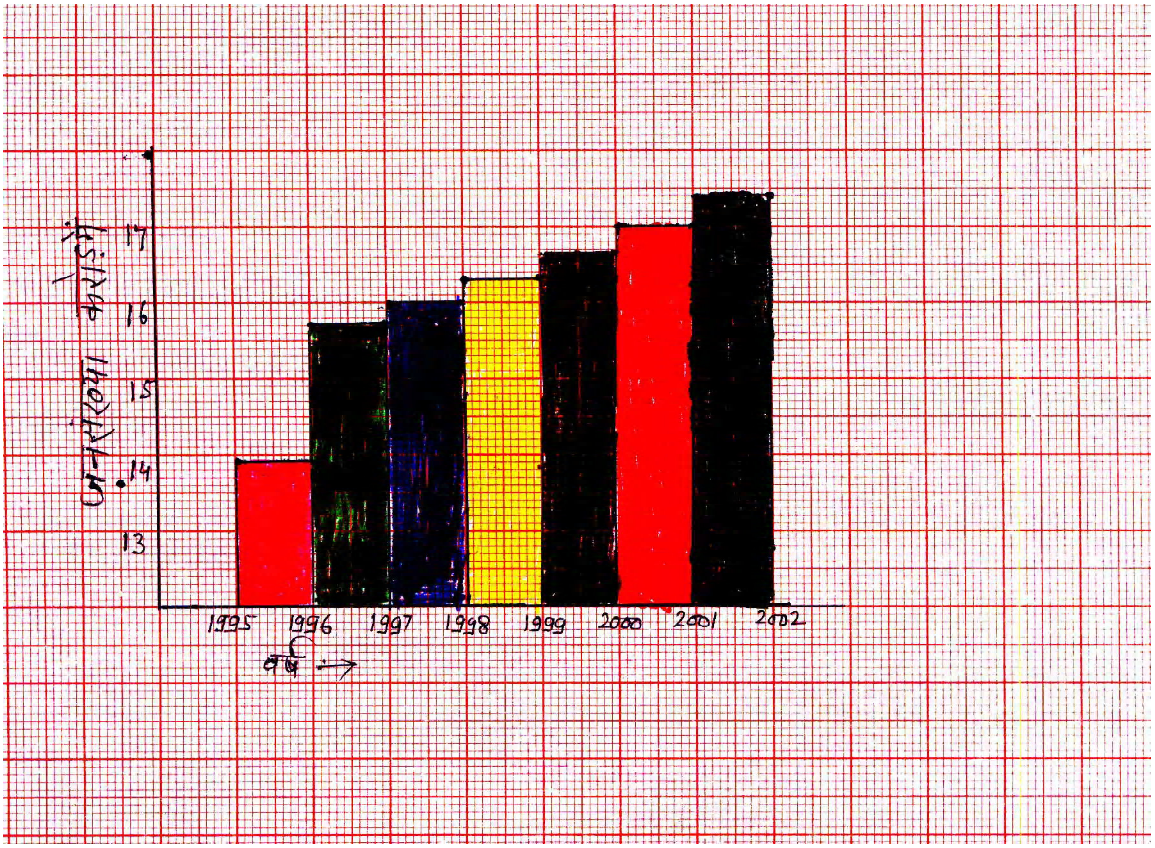
हमारे प्रदेश में वर्तमान वर्ष में कितनी जनसंख्या है पिछले वर्ष कितनी जनसंख्या थी या उससे पिछले वर्ष कितनी जनसंख्या थी आदि को समझकर एक सारणी बनाते हैं, इस सारणी में प्राप्त किये गये आँकड़ों को लिखते हैं। इन प्राप्त किये गये आँकड़ों का आलेखीय निरूपण कर अभीष्ट परिणाम प्राप्त करते हैं। आलेखीय निरूपण की एक विधा दण्ड आरेख है।

दण्ड आरेख

विभिन्न संवर्गों की आपेक्षिक स्थित दर्शाने के लिये दण्ड आरेख का उपयोग करते हैं। जैसे विभिन्न वर्षों में किसी प्रदेश की जनसंख्या निम्नवत् है :

क्रम संख्या	वर्ष	जनसंख्या करोड़ में
1.	1995-1996	13.91
2.	1996-1997	15.67
3.	1997-1998	15.96
4.	1998-1999	16.28
5.	1999-2000	16.64
6.	2000-2001	17.01
7.	2001-2002	17.43

इसको दण्ड आरेख द्वारा निम्नलिखित रूप में खींचा गया है।



निष्कर्ष

दण्ड आरेख से स्पष्ट है कि 1996-1997 में प्रदेश की जनसंख्या वृद्धि दर सर्वाधिक तथा 1998-1999 में जनसंख्या वृद्धि दर न्यूनतम है। इस प्रकार सांख्यिकी का उपयोग कर प्राप्त आंकड़ों के आधार पर किसी देश की जनसंख्या में प्रतिवर्ष औसत वृद्धि का अनुमान लगा सकते हैं। इसी के आधार पर अन्य सुविधाओं का विकास कर सकते हैं। स्पष्ट है कि जनसंख्या अध्ययन में सांख्यिकी का ज्ञान उपयोगी है।

प्रोजेक्ट : 2

त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिह्नों का ज्ञान चार्ट के माध्यम से कराना, कोण के पूरक, सम्पूरक कोण आदि कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को चित्र के माध्यम से व्यक्त करना।

पृष्ठभूमि

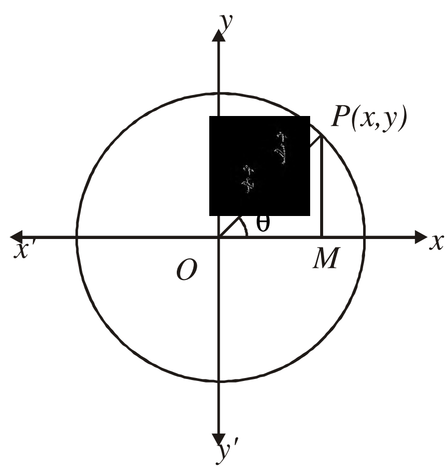
आधुनिक गणित में त्रिकोणमिति का एक महत्वपूर्ण स्थान है। प्राचीनकाल से ही ज्योतिष विद्या में इसका व्यवहार होता रहा है। त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच पारस्परिक सम्बन्ध स्थापित करना, उसके आधार पर दूरी और ऊँचाई से सम्बन्धित समस्याओं को हल करना इसका प्रारम्भिक उद्देश्य रहा है किन्तु आज इसका प्रयोग यांत्रिकी सर्वेक्षण नौ विद्या आदि में किया जा रहा है। त्रिकोणमिति के अध्ययन में कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात ही बुनियादी टूल्स हैं, अतः इनका सम्यक ज्ञान परमावश्यक है। कार्तीय अक्षों *(x-*अक्ष एवं *y-*अक्ष*)* के परस्पर प्रतिच्छेदन बिन्दु *(*मूल बिन्दु *O)* के परितः परिक्रामी रेखा के परिक्रमण से बनने वाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात धनात्मक एवं ऋणात्मक दोनों होते हैं। प्रथम चतुर्थांश में ये कोण न्यूनकोण, द्वितीय चतुर्थांश में अधिक कोण और तीसरे एवं चौथे चतुर्थांश में वृहत्कोण होते हैं। चार्ट एवं चित्र के माध्यम से इन कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिह्नों *(+* एवं *−)* को बोध कराना सुगम एवं व्यावहारिक है।

उद्देश्य

परिक्रामी रेखा के परिक्रमण से बनने वाले कोणों के कौन-से त्रिकोणमितीय अनुपात किस चतुर्थांश में धनात्मक और किस चतुर्थांश में ऋणात्मक होते हैं और क्यों ?

इसी तथ्य का अध्ययन इस प्रोजेक्ट का उद्देश्य है।

वर्णन



1. मान लीजिए कि परिक्रामी रेखा की प्रथम चतुर्थांश में स्थिति OP है। P से x-अक्ष पर लम्ब PM डाला गया है। मान लीजिए कि बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं। हम जानते हैं कि प्रथम चतुर्थांश में किसी भी बिन्दु का भुज और कोटि *(x-*निर्देशांक और *y-*निर्देशांक*)* दोनों ही धनात्मक होते हैं, अतः उपर्युक्त चित्र में

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = +ve$$ (क्योंकि अंश और हर दोनों धनात्मक हैं।)

$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = +ve$$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x} = +ve$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y} = +ve$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = +ve$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = +ve$$

हम जानते हैं कि प्रथम चतुर्थांश में स्थित कोण न्यूनकोण होते हैं। अतः उपर्युक्त निरूपण से स्पष्ट है कि न्यूनकोणों के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात धनात्मक होते हैं।

2. कोण θ के सम्पूरक कोण *(180°-θ)* के त्रिकोणमितीय अनुपात

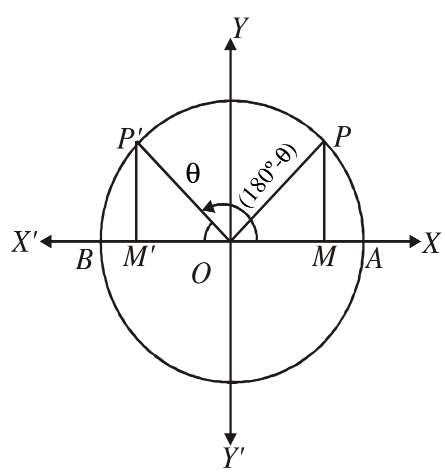
पार्श्व चित्र में मान लीजिए कि परिक्रामी रेखा OX की धनात्मक दिशा के साथ $\angle POM = \theta$ बनाती है। पुनः मान लीजिए कि परिक्रामी रेखा OX से चलकर OX' पर पहुँचकर विपरीत दिशा में $\angle\theta$ के बराबर घूम कर OP' की स्थिति में आ जाती है।

अतः $\angle P'OM' = \theta$

और उस दशा में $\angle P'OX = (180^o - \theta)$

स्पष्टतः $\Delta\ OMP \cong \Delta\ OM'P'$

अतः संगत भुजाएँ निरपेक्षतः बराबर होंगी।



अब $\sin(180^o-\theta) = \dfrac{P'M'}{OP'} = \dfrac{PM}{OP} = \sin\theta$

$$\cos(180^o-\theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180^o-\theta) = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{PM}{-OM} = -\tan\theta$$

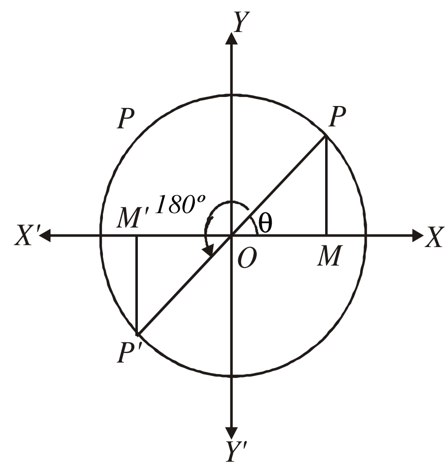
$$\cot(180^\circ-\theta)=\frac{OM}{P'M'}=\frac{-OM}{PM}=-\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ-\theta)=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-OM}=-\sec\theta$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)=\frac{OP'}{P'M'}=\frac{OP}{PM}=\operatorname{cosec}\theta$$

अतः द्वितीय चतुर्थांश में स्थित अधिक कोणों के *sin* और *cosec* तो धनात्मक होते हैं किन्तु अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात *(cos, tan, cot or sec)* ऋणात्मक होते हैं।

3. पार्श्वचित्र में $\angle XOP' = 180^o + \theta$



अतः

$$\sin(180^\circ+\theta)=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{-PM}{OP}=-\sin\theta\ (-ve)$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-OM}{OP}=-\cos\theta(-ve)$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{P'M'}{OM'}=\frac{-PM}{-OM}=\tan\theta(+ve)$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\tan(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta(+ve)$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta(-ve)$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\operatorname{cosec}\theta(-ve)$$

अतः तृतीय चतुर्थांश में स्थित वृहत्कोणों *(*180^0 तथा 270^0 के बीच के*)* के *tan* व *cot* तो धनात्मक होते हैं किन्तु उनके *sin, cos, sec* और *cosec* ऋणात्मक होते हैं।

4. पार्श्व चित्र में $\angle XOP' = (360^o - \theta)$ जहाँ न्यूनकोण है।

अब $\sin(360^\circ-\theta)=\dfrac{P'M}{OP'}=\dfrac{-PM}{OP}=-\sin\theta\ (-ve)$

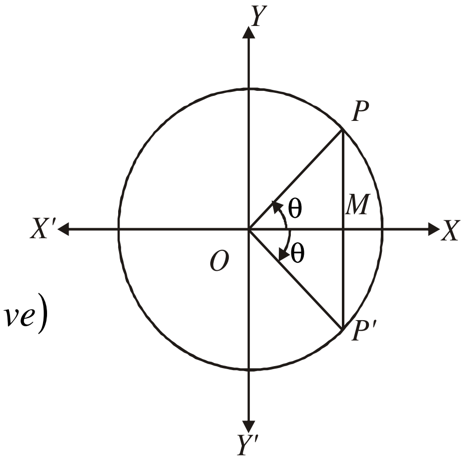
$$\cos(360^\circ-\theta)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=+\cos\theta(+ve)$$

$$\tan(360^\circ-\theta)=\frac{P'M}{OM}=\frac{-PM}{OM}=-\tan\theta(-ve)$$

$$\cot(360^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan(360^\circ-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta(-ve)$$

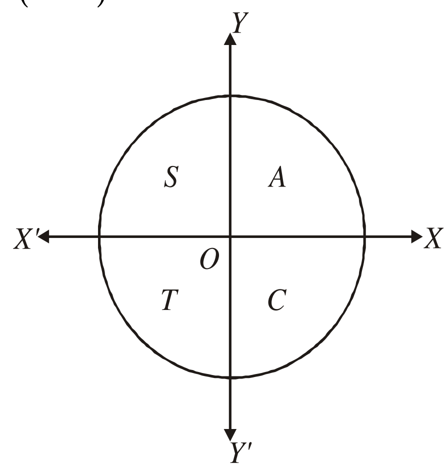
$$\sec(360^\circ-\theta)=\frac{1}{\cos(360^\circ-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta(+ve)$$

$$\operatorname{cosec}(360^\circ-\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\operatorname{cosec}\theta(-ve)$$



अतः चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित वृहत्कोणों (270^0 तथा 360^0 के बीच के) के *cos* और *sec* तो धनात्मक होते हैं किन्तु उनके *sin, tan, cot, cosec* ऋणात्मक होते हैं।

उपर्युक्त चारों स्थितियों को निम्नांकित चित्र से समझा जा सकता है।



जहाँ *A = All* = (सभी त्रिकोण मितीय अनुपात)

S = केवल *sin* (तथा *sin* का व्युत्क्रम *cosec*)

T = केवल *tan* (तथा *tan* का व्युत्क्रम *cot*)

C = केवल *cos* (तथा *cos* का व्युत्क्रम *sec*)

इसमें यह आशय निहित है कि द्वितीय तृतीय एवं चतुर्थ चतुर्थांशों में जिन त्रिकोणमितीय अनुपातों का धनात्मक के रूप में उल्लेख नहीं किया गया है, वे सभी ऋणात्मक हैं।

5. कोण θ के पूरक (कोटिपूरक) कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

पार्श्वांकित चित्र में $\angle OMP = 90^o$

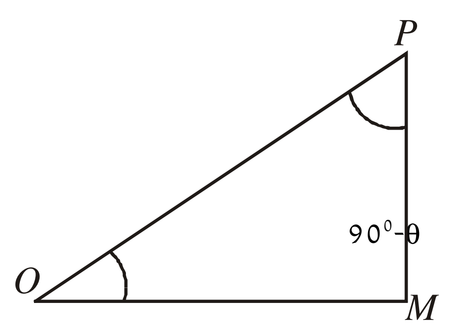
तथा $\angle POM = \theta$

अतः $\angle OPM = (90^o - \theta)$

जो $\angle\theta$ का कोटिपूरक कोण हैं।

न्यूनकोण θ के लिए समकोण में $\Delta\ OMP$

लंब = *PM* , आधार = *PM* तथा कर्ण = *OP*



θ

तथा न्यूनकोण *(90º – θ)* के लिए

लम्ब = *OM*, आधार = *PM* और कर्ण = *OP*

(ध्यान दीजिए कि किसी समकोण Δ में सदैव दो न्यून कोण होते हैं। जिनके सपेक्ष लम्ब और आधार परस्पर अदल-बदल जाते हैं। किन्तु कभी नहीं बदलता, कर्ण सदैव वही रहता है।

अतः

$$\sin(90^\circ-\theta)=\frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

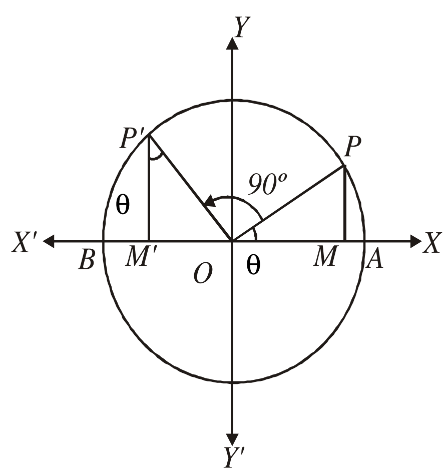
$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{OM}{PM} = \cot\theta$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\frac{PM}{OM} = \tan\theta$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\frac{OP}{OM} = \cos ec\theta$$

$$\cos ec(90^\circ-\theta)=\frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

6. कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात



पार्श्वचित्र में परिक्रामी रेखा *OX* से धनात्मक दिशा में ∠θ के बराबर घूम कर *OP* स्थिति में पहुँचती है और फिर वहाँ से 90° घूम कर *OP'* स्थिति में पहुँचती है।

अतः $\angle P'OX = 90^\circ + \theta$

$\Delta\ OM'P'$ में $\angle P'OM' = 180^\circ - (90^\circ + \theta) = (90^\circ - \theta)$

अतः $\angle OP'M' = \theta$

$\Delta\ OPM \cong \Delta\ P'OM'$ | $\angle OMP = \angle OM'P' = 90^\circ$

अत $PM = M'O$ | $\angle POM = \angle OP'M' = \theta$

$OM = P'M'$ | भुजा $OP = OP'$ (त्रिज्याएँ)

अतः $\sin(90^\circ+\theta)=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta$

$$\cos(90^\circ+\theta)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-PM}{OP}=-\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=\frac{P'M'}{OM'}=\frac{OM}{-PM}=-\cot\theta$$

$$\cot(90^\circ+\theta)=\frac{OM'}{P'M'}=\frac{-PM}{OM}=-\tan\theta$$

$$\sec(90^\circ+\theta)=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-PM}=-\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=\frac{OP'}{P'M'}=\frac{OP}{OM}=\sec\theta$$

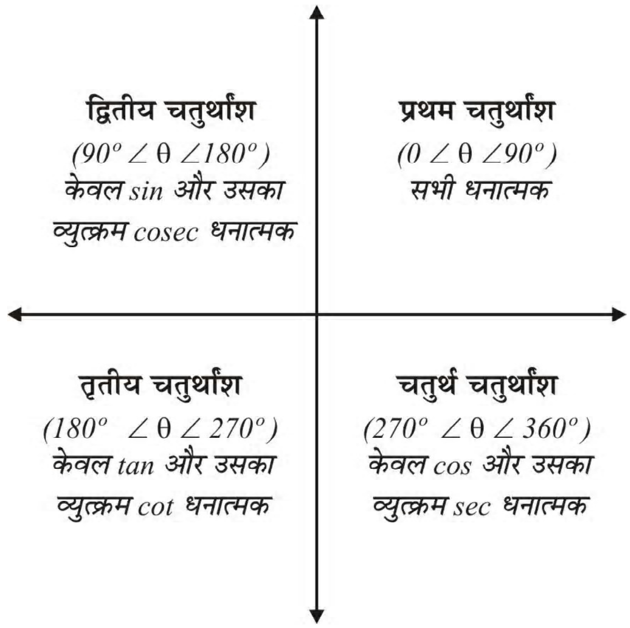
निष्कर्ष

परिमाण के लिए

1. **कोण *($90^o \pm \theta$)* के त्रिकोणमितीय अनुपात संगत पूरक अनुपातों में बदल जाते हैं, यथा *sin, cos* में; *cos, sin* में; *tan, cot* में; *cot, tan* में; *sec, cosec* में *cosec, sec* में बदल जाते हैं।**

2. **(−θ) या ($360^o - \theta$), *($180^o \pm \theta$)* कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के परिमाण में कोई परिवर्तन नहीं होता अर्थात् *sin, cos, tan, cot, sec, cosec* क्रमशः *sin, cos, tan, cot, sec* और *cosec* ही रहते हैं।**

2. **चिह्नों के लिए**



उपर्युक्त 1 एवं 2 को संयुक्त कर, संक्षेपत :

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\quad\quad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

या $\sin(360^o - \theta) = -\sin\theta$ $\quad\quad$ $\cos(360^o - \theta) = \cos\theta$

$\sin(90^o - \theta) = \cos\theta$ $\quad\quad$ $\cos(90^o - \theta) = \sin\theta$

$\sin(90^o + \theta) = \cos\theta$ $\quad\quad$ $\cos(90^o + \theta) = -\sin\theta$

$\sin(180^o - \theta) = \sin\theta$ $\quad\quad$ $\cos(180^o - \theta) = -\cos\theta$

$\sin(180^o + \theta) = -\sin\theta$ $\quad\quad$ $\cos(180^o + \theta) = -\cos\theta$

टिप्पणीः

किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों में केवल *sin* और *cos* के ज्ञात होने पर शेष अनुपात गणना से स्वतः ज्ञात हो जाते हैं क्योंकि

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}, \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

अनुप्रयोग

ऊँचाई और दूरी के प्रश्नों में उन्नयन कोणों, अवनमन कोणों (जिन्हें क्रमशः उन्नतांश और अवनतांश की कहते हैं) के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान प्रतिस्थापित करने की आवश्यकता होती है गणना कार्यों में इनका अनुप्रयोग किया जाता है।

प्रोजेक्ट : 3

विषय : सरकार द्वारा लगाये जाने वाले विभिन्न प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष कर का अध्ययन करना।

भूमिका

दैनिक जीवन में प्रत्येक व्यक्ति किसी न किसी प्रकार, सरकार द्वारा लगाये गये विभिन्न प्रकार के करों का भुगतान करता है। यदि व्यक्ति सरकारी या गैर सरकारी सेवा में है तो वह इनकम टैक्स की सीमा में आते ही इनकम टैक्स सरकार को देता हैं। वस्तुओं के खरीदने पर वह मूल्य संवर्धित कर *(VAT)* देता है। गृहकर, रोड टैक्स आदि शब्दों से अधिकतर लोग परिचित हैं। इनमें से कुछ कर चुकाते समय ज्ञात होता है और कुछ का ज्ञान सीधे उपभोक्ता को नहीं हो पाता।

उद्देश्य

बच्चों को सरकार द्वारा लगाये जाने वाले विभिन्न प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष कर का ज्ञान कराना।

प्रस्तुतीकरण

बच्चों को टेलीफोन बिल, होटल के बिलों को देकर उनको अध्ययन करने के लिए दिये जायें और उनसे बिल में अंकित सेवाकर के बारे में बताया जाये। प्रत्येक बिल में वास्तविक खर्च में सेवाकर जोड़ कर ही बिल का भुगतान करना पड़ता है। अतः सेवाकर प्रत्यक्ष रूप से उपभोक्ता को देना पड़ता है।

इसी प्रकार इनकम टैक्स के रिटर्न को भी बच्चों को अध्ययन करने के लिए उपलब्ध कराकर, उन्हें यह बताया जाये कि वित्तीय वर्ष की आमदनी पर सरकार द्वारा निर्धारित नियमों के तहत इनकम टैक्स भी प्रत्यक्ष रूप से देना पड़ता है।

रेलवे एव बस के टिकटों को बच्चों को उपलब्ध कराकर उनसे, उसमें लगे यात्री कर, टोल टैक्स, आदि को बताने को कहें। बच्चे टिकट में प्रत्यक्ष रूप से किसी भी प्रकार के टैक्स के लगे होने की सूचना नहीं दे पायेंगे। अध्यापक, बच्चों को यह बतायें कि टिकट के दाम में ही सभी टैक्स अप्रत्यक्ष रूप से शामिल हैं। अतः वे टैक्स जो उपभोक्ता को प्रत्यक्ष रूप से नहीं देना पड़ता, अप्रत्यक्ष कर के दायरे में आते हैं।

इसी प्रकार दैनिक उपयोग की वस्तुओं को खरीदने पर वैट, अप्रत्यक्ष कर के रूप में वस्तु के विक्रम मूल्य में ही सम्मिलित रहता है। प्रत्येक उपभोक्ता को यह अप्रत्यक्ष कर वस्तु के खरीदने पर देना पड़ता है। जिन वस्तुओं

पर *M.R.P. (inclusive all taxes)*लिखा होता है। उन पर अप्रत्यक्ष कर देना होता है। और जिन पर *exclusive all taxes* लिखा होता है। उन पर प्रत्यक्ष कर देना होता है।।

निष्कर्ष

उपर्युक्त उदाहरणों द्वारा बच्चों में सरकार द्वारा लगाये गये प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष कर का ज्ञान हो जायेगा। वह टेलीफोन के बिलों एवं इनकम टैक्स रिटर्न को देखकर सेवा कर एवं इनकम टैक्स की गणना की प्रत्यक्ष कर के रूप में कर सकते हैं।

अनुप्रयोग

सेवा कर एवं इनकम टैक्स की गणना करके प्रत्यक्ष कर को जाना जा सकता है। अपत्यक्ष कर की गणना सीधे तौर पर नहीं की जा सकती है।

प्रोजेक्ट 4

दूरी मापने का यंत्र सेक्सटैण्ट *(Sextant)* बनाना और प्रयोग करना

उद्देश्य

- इमारत की ऊँचाई सेक्सटैण्ट द्वारा ज्ञात करना।

सामग्री

लकड़ी का एक तख्ता जिस पर एक खड़ी पट्टी लगी हो, एक वृत्ताकार चाँदा जिस पर $0^0 - 360^0$ कोण अंकित हो, एक 20 मीटर लम्बा नापने वाला फीता, एक वर्गाकार प्लेट, एक नलिका आदि।

विधि -

इस तख्ते की पट्टी में कीलों द्वारा चौकोर प्लेट जड़ दें। इस प्लेट के मध्य में एक छेद करके वृत्तीय चांदा नट बोल्ट द्वारा इस प्रकार लगा दें कि चांदा इस नट के साथ वामावर्त / दक्षिणावर्त घूम सकें। इस चाँदा पर 0^0 के अनु नलिका चिपका दें। हमारा सेक्सटैण्ट तैयार है।

अब इमारत जिसकी ऊँचाई ज्ञात करनी है, से 15 मीटर की दूरी पर फीते से निशान लगाया गया। अब इस दूरी को 3मीटर, 6 मीटर, 9 मीटर, 12 मीटर और 15 मीटर की दूरी पर पाँच समान भाग को चिह्नित किया।

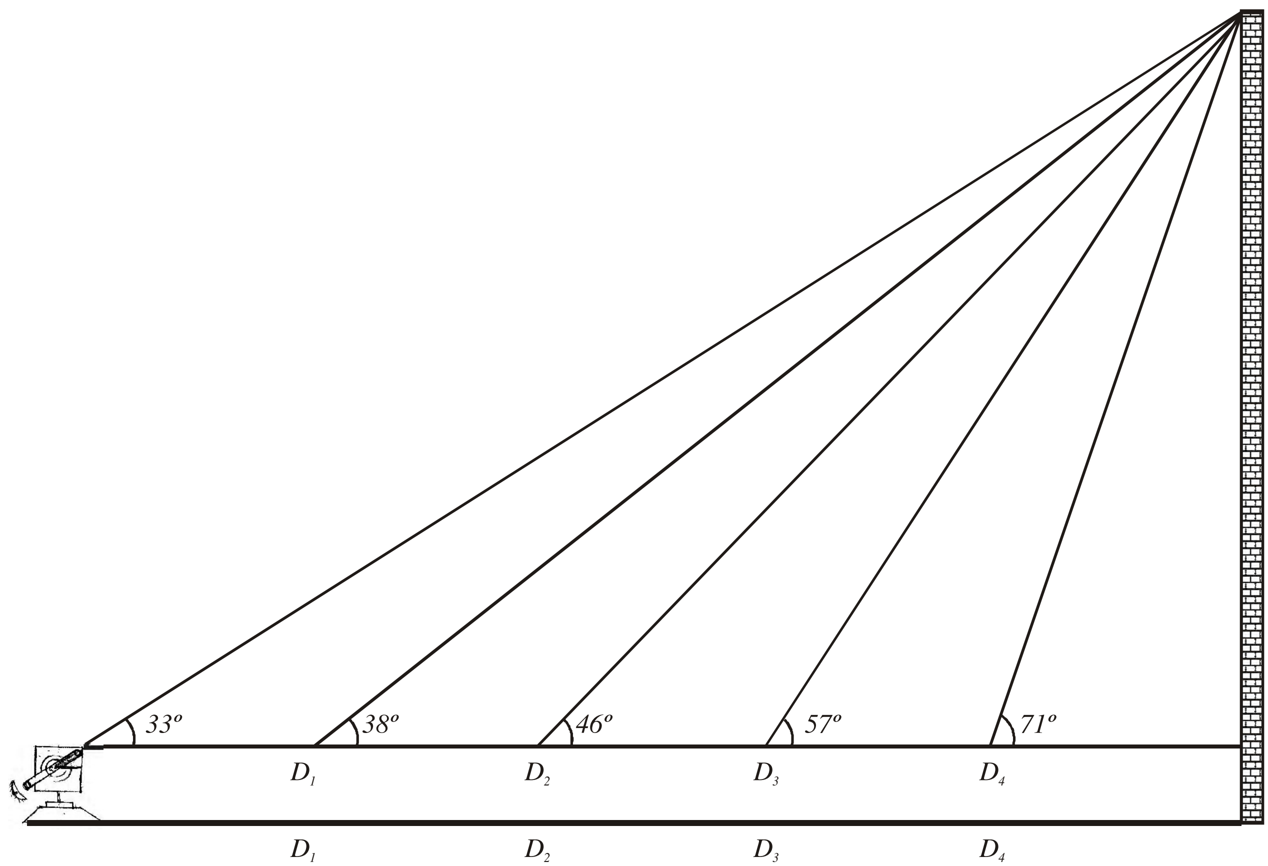
चाँदा के केन्द्र से जमीन की ऊँचाई (h) नापने पर 0.5 मीटर प्राप्त होता है।

अब 15 मीटर की दूरी पर सेक्सटैण्ट को रखकर नलिका में आँख से झाँक करके इमारत के शिखर पर कोई बिन्दु देखते हैं। इस प्रकार उपरोक्त बिन्दु पर कोण नापने पर 33^0 प्राप्त होता है। यही बिन्दु C पर बिन्दु A का उन्नयन कोण है।

इसी प्रकार सेक्सटैण्ट को 12 मीटर, 9 मीटर, 6 मीटर और 3 मीटर पर रखकर क्रमशः कोण 38^0, 46^0, 57^0 और 71^0 प्राप्त करते हैं।

प्रेक्षण :

क्र.सं.	चाँदा द्वारा नापा गया कोण (θ)	जमीन से चाँदा के केन्द्र की दूरी *(h)*	इमारत से यंत्र की दूरी *(d)*
1.	33^0	0.5	15
2.	38^0	0.5	12
3.	46^0	0.5	9
4.	57^0	0.5	6
5.	71^0	0.5	3

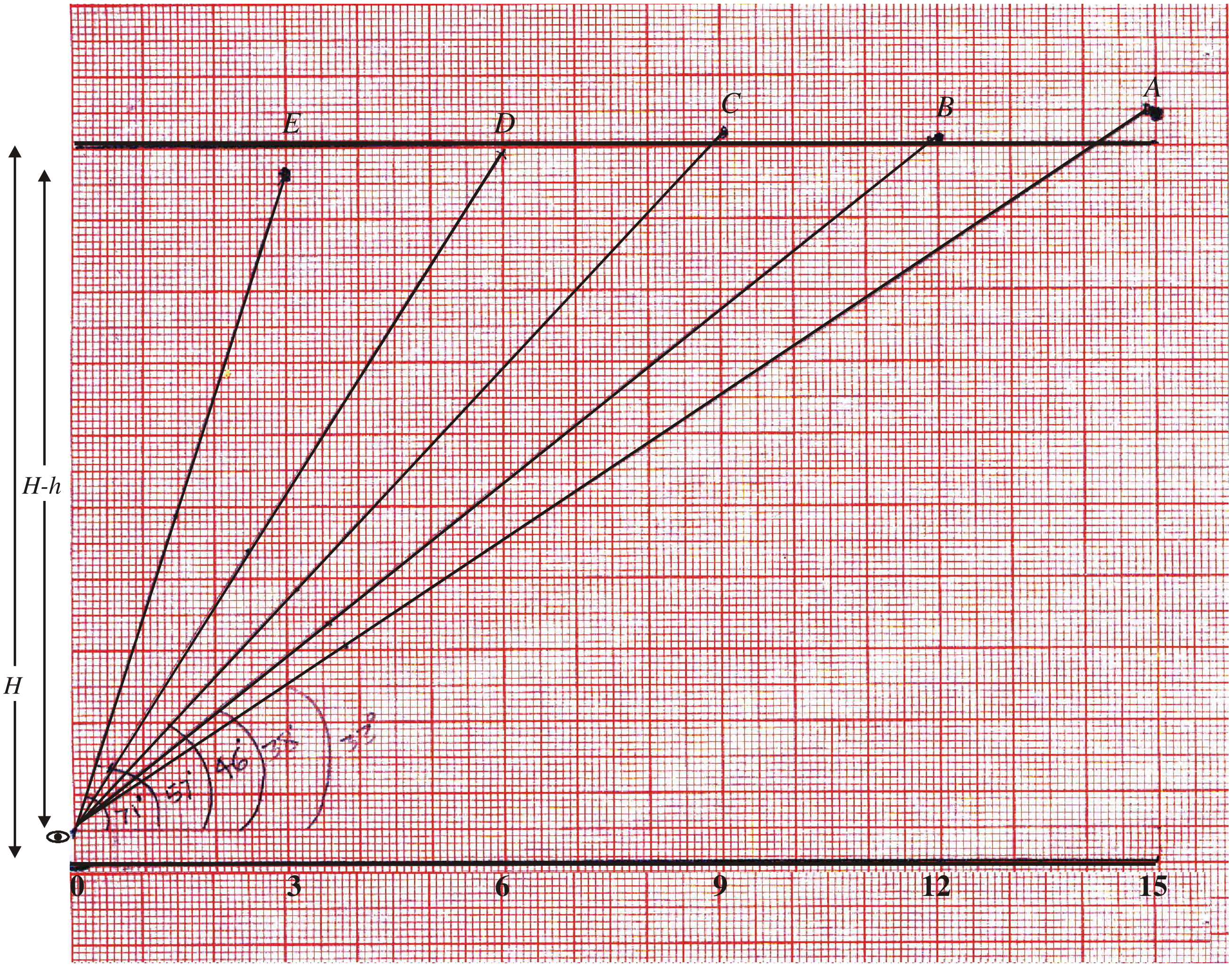


इस रेखा पर चित्रानुसार (मूल बिन्दु के ऊपर जहाँ आँख दिखाई गई है) बिन्दु से प्रेक्षित कोणों को चाँदे से बनाया। तत्पश्चात कोणों की रेखा तथा सम्बन्धित दूरी के प्रतिच्छेदन बिन्दु को (*A, B, C, D, E*) प्राप्त किया।

पुनः x-अक्ष के समान्तर ग्राफ-पेपर पर रेखा खींची। जो अत्यधिक बिन्दुओं (यहाँ *A, B, C, D, E*) के पास से होकर गुजरती है।

मूल बिन्दु 0 से 0.5 मीटर अक्ष पर एक रेखा खींचा *(*1 सेमी = 1 मीटर मानकर*)*

अब ग्राफ पेपर पर 1 सेमी = 1 मीटर मानकर अक्ष पर 15 सेमी = 15 मीटर की एक सरल रेखा खींचा।



ग्राफ पेपर से एक रेखा जो x-अक्ष के समान्तर प्राप्त होती है। यह रेखा अत्यधिक बिन्दुओं के पास से होकर गुजरती है।

इस रेखा की मूल बिन्दु से दूरी, इमारत की अभीष्ट ऊँचाई होगी।

इमारत की ऊँचाई = 10 मीटर प्राप्त होती है।

निष्कर्ष

उपरोक्त यंत्र के द्वारा किसी इमारत, पेड़, चिमनी इत्यादि की ऊँचाई ज्ञात किया जा सकता है।

प्रोजेक्ट 5

उद्देश्य

- गणित की चित्रकला में उपयोगिता

पृष्ठ भूमि

आदिकाल से ही गणित का उपयोग, जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में होता रहा है। वैदिक काल में यज्ञवेदियों के निर्माण में गणित का उपयोग करके वृत्ताकार, त्रिभुजाकार, वर्गाकार, षट्भुजाकार आदि वेदियाँ बनाई जाती थीं। मुगल काल में वास्तुकला में इसका उपयोग आज भी ताजमहल, कुतुबमीनार आदि के निर्माण में स्पष्ट देखा जा सकता है।

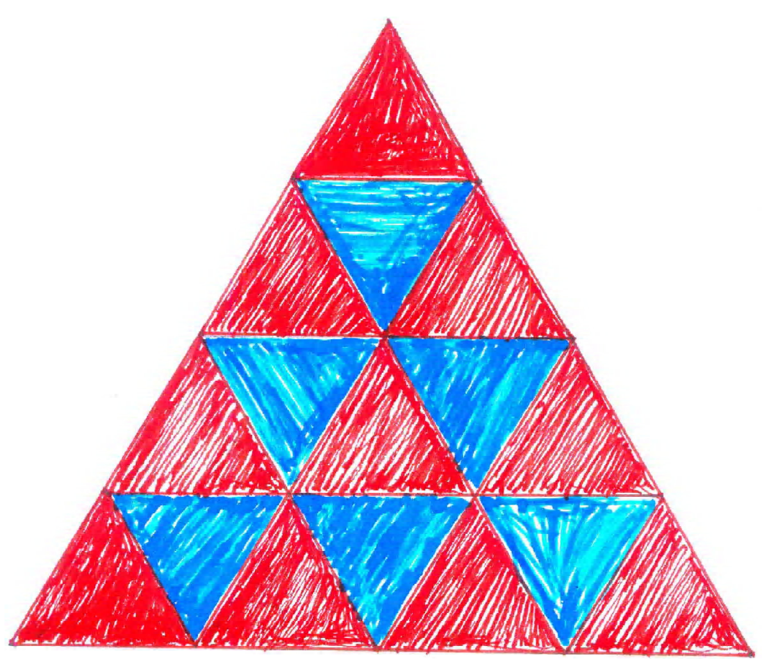
आधुनिक काल में इसकी उपयोगिता और भी बढ़ गई है। विज्ञान, सांख्यिकी, भूगोल, वास्तुकला, अंतरीक्ष विज्ञान, भूगर्भ विज्ञान, कला आदि में गणित का उपयोग अधिक से अधिक होने लगा है।

इस प्रोजेक्ट में हम कुछ उदाहरण देकर चित्रकला में गणित का उपयोग करेंगे।

आवश्यक सामग्री

पटरी, परकार, गुनिया, चाँदा, पेंसिल रबर, सादा कागज।

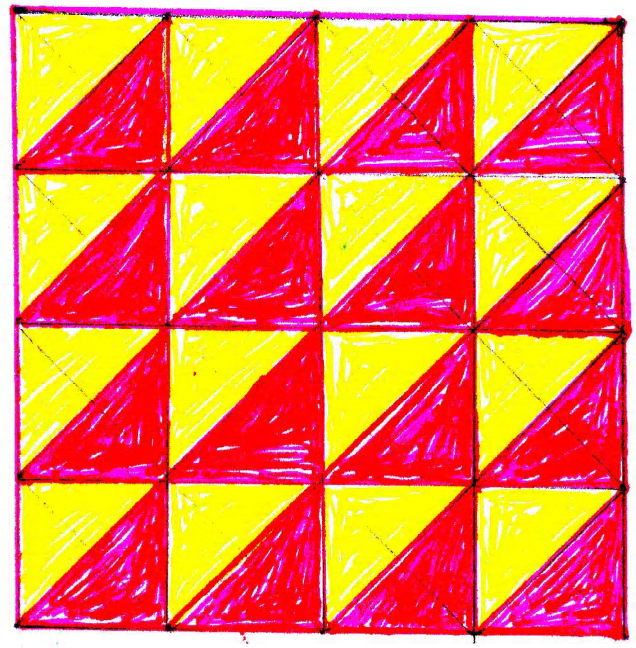
उदाहरण 1 - 12 सेमी भुजा का समबाहु त्रिभुज बनाइए। प्रत्येक भुजा को चार बराबर भागों में विभाजित कीजिए। चित्रानुसार सम्मुख बिन्दुओं को मिलाइए। इनके मिलाने से बने त्रिभुजों को रंगिए। इससे आपको एक सुन्दर आकृति (डिजाइन) प्राप्त होगी। देखिए चित्र-1।



चित्र-1

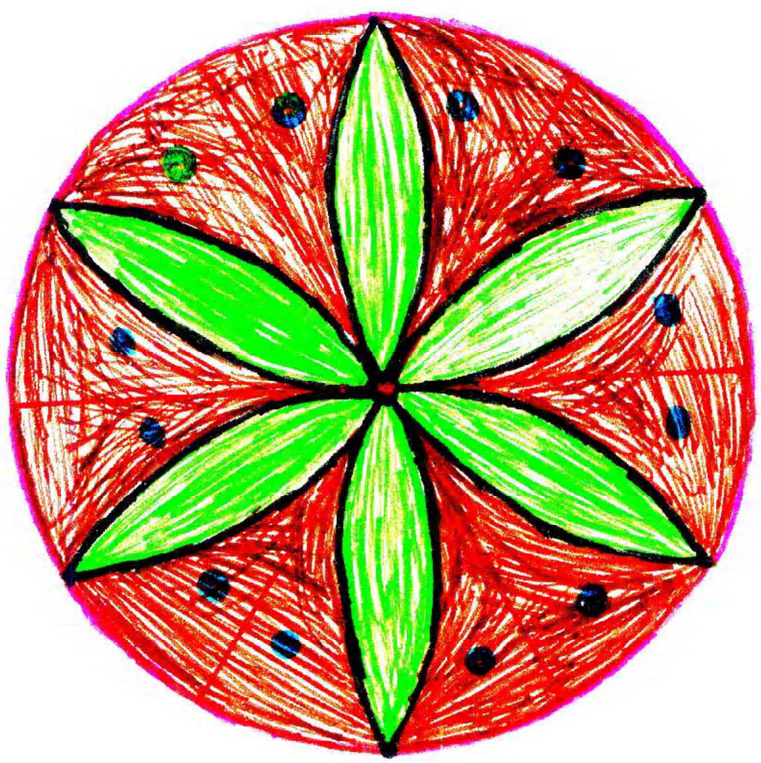
उदाहरण 2 - 8 सेमी भुजा का वर्ग बनाइए। प्रत्येक भुजा को चार बराबर भागों में विभाजित कीजिए। चित्रानुसार सम्मुख बिन्दुओं को मिलाकर इसके अन्तर्गत अन्य छोटे-छोटे वर्ग बनाइए। इनके विकर्णों को मिलाइए तथा निर्मित आकृति को रंगिए। आप को एक सुन्दर आकृति *(डिजाइन)* प्राप्त होगी।

देखिए चित्र - 2



चित्र-2

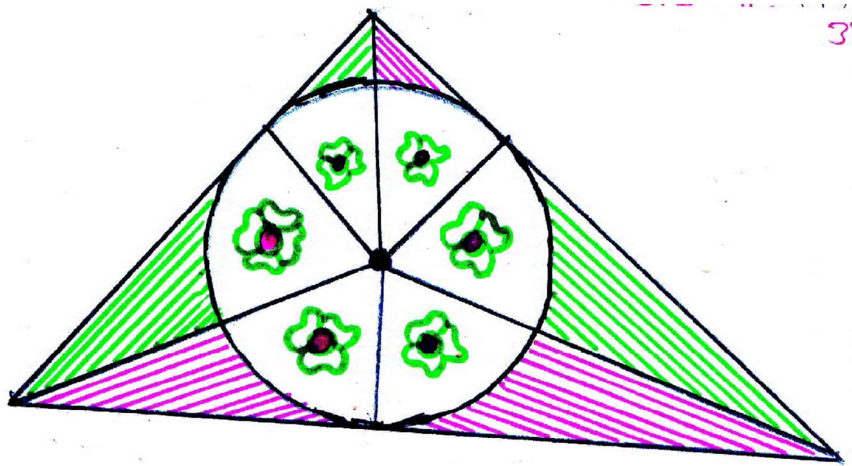
उदाहरण 3 - चित्रानुसार किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए। वृत्त पर कोई बिन्दु लेकर चाप काटिए। पुनः उसी त्रिज्या से, जिस बिन्दु पर चाप ने वृत्त को प्रतिच्छेदित किया है, दूसरा चाप लगाइए। इस प्रक्रिया को कई बार दोहराइए। आप को निम्नांकित चित्र प्राप्त होगा। इसमें रंग भर कर सुन्दर सी डिजाइन प्राप्त कीजिए। देखिए चित्र 3



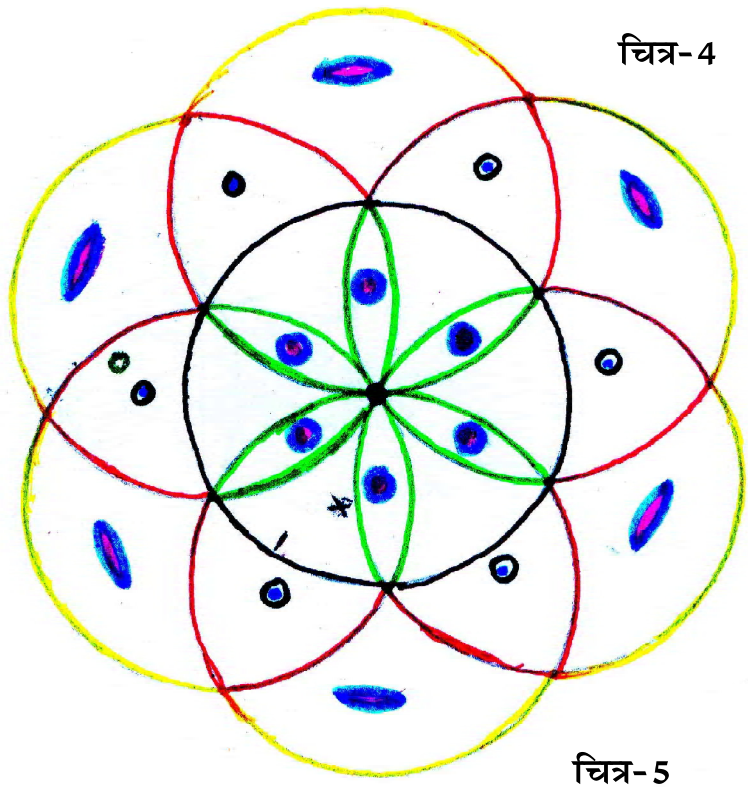
चित्र-3

निष्कर्ष

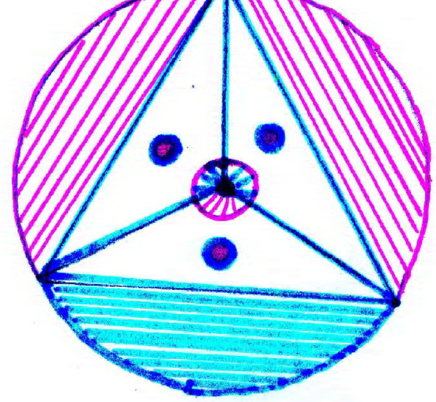
इसी प्रकार शिक्षक, शिक्षार्थियों से अन्य आकृतियाँ बनवायें और उनमें रंग भरने को कहें। जैसे देखें चित्र 4, 5, 6 स्पष्ट है कि इस इन सभी आकृतियों में गणित का प्रयोग हुआ है।



चित्र-4



चित्र-5



चित्र-6

प्रोजेक्ट : 6

एक घर खरीदने/निर्माण करने के लिए बैंक से लोन लेने के विभिन्न चरणों का ब्योरा प्रस्तुत करना

शिक्षण बिन्दु

- ☞ गृह ऋण की आवश्यकता
- ☞ गृह ऋण की उपयोगिता
- ☞ गृह ऋण लेने के लिए आवश्यक सूचनायें
- ☞ आवेदन पत्र के साथ आवश्यक प्रपत्र
- ☞ गृह ऋण उचित आर्थिक निर्णय

प्रस्तुतीकरण

किसी भी व्यक्ति का निजी गृह होना उसकी मूलभूत आवश्यकता है किन्तु आवश्यक पूँजी के अभाव के कारण निजी मकान होना स्वप्न मात्र लगता है। वर्तमान में विभिन्न वित्तीय संस्थायें गृह-ऋण की सुविधा प्रदान करती हैं जिसकी सहायता से व्यक्ति निजी मकान की व्यवस्था कर सकता है।

गृह क्रय हेतु पर्याप्त पूँजी के अभाव में गृह-ऋण लेकर गृह क्रय/निर्माण करना उचित आर्थिक निर्णय है यह निम्नवत् चार्ट के द्वारा समझा जा सकता है।

वर्तमान में मकान का किराया			**गृह ऋण की देय किस्त**		
प्रतिमाह किराया (रुपयों में)	**अवधि**	**कुल धनराशि (रुपयों में)**	**मासिक किस्त (रुपयों में)**	**अवधि**	**कुल धनराशि (रुपयों में)**
₹ 2000/-	प्रथम 5 वर्ष	₹1,20,000/-			
₹ 3000/-	द्वितीय 5 वर्ष	₹1,80,000/-	₹ 3000/-	15 वर्ष	₹5,40,000/-
₹ 4000/-	तृतीय 5 वर्ष	₹2,40,000/-			
कुल भुगतान की राशि		₹5,40,000/-	कुल भुगतान की राशि		₹5,40,000/-

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि एक व्यक्ति 15 वर्ष तक किराये के भवन में रहता है और कुल 5,40,000 किराये के रूप में भुगतान करने के पश्चात भी न तो भवन क्रय करने की स्थित में होता है और न ही वह भवन स्वामी बन पाता है। जबकि यदि व्यक्ति बैंक से ऋण लेकर गृह क्रय करता है तो 15 वर्ष में बैंक का ऋण अदा करके गृह स्वामी बन जाता है तथा पिछले 15 वर्षों से अपने भवन में रहने का सुख उठाता है। इसके अतिरिक्त 15 वर्षों में भवन के विक्रय मूल्य में भी पर्याप्त वृद्धि हो जाती है जो पूंजीगत लाभ की तरह ऋणी को उपलब्ध रहता। इस प्रोजेक्ट के द्वारा बैंक से गृह-ऋण प्राप्त करने एवं ऋण की अदायगी के विभिन्न चरणों की जानकारी हो सकेगी।

गृह ऋण लेने के निर्णय के पूर्व निम्नवत् सूचनाओं से अवगत होना आवश्यक है :

1. गृह ऋण किन उद्देश्यों हेतु उपलब्ध हैं -
    - अ. मकान *(*नया या पुराना*)* क्रय
    - ब. भूमि क्रय
    - स. भवन निर्माण
    - द. भवन विस्तार
    - य. पुनः निर्माण इत्यादि
2. कौन-कौन सी वित्तीय संस्था गृह ऋण देते हैं।

    जैसे - *LIC, HUDCO,* बैंक, नियोजक कर्ता *(Employer)*।
3. किस बैंक या वित्तीय संस्था से आसान शर्तों पर गृह-ऋण प्रार्थी को उपलब्ध हो सकता है उसी बैंक से आवेदन पत्र प्राप्त कर ऋण के लिए प्रस्तुत करना।
4. गृह ऋण के लिए ऋणी की वाँछित पात्रता जैसे सतत् एवं सुदृढ़ आय *(steady and regular source of income)* अथवा गृह ऋण के भुगतान की क्षमता।
5. गृह ऋण की अदायगी हेतु वाँछित प्रतिभूति (भूमि/भवन का बंधक रखना) या पर्याप्त वित्तीय सुदृढ़ व्यक्ति द्वारा ऋणी की जमानत लेना।

आवेदन पत्र के साथ आवश्यक दस्तावेज *(*प्रपत्र*)*

सामान्यतः गृह-ऋण हेतु निम्नांकित दस्तावेज आवेदन पत्र के साथ प्रस्तुत करना होता है :

1. के.वाई.सी. *(Know your customer)* सम्बन्धी प्रपत्र

अ. ऋणी का पहचान प्रपत्र

- क. पास पोर्ट *(Pass port)*
- ख. वोटर कार्ड *(Voter card)*
- ग. पैन कार्ड *(PAN Card)*
- घ. ड्राइविंग लाइसेन्स *(Driving Licence)*

ङ नियोजक द्वारा निर्गत पहचान पत्र

ब. निवास सम्बन्धी दस्तावेज

क. बिजली का बिल

ख. टेलीफोन बिल

ग. राशन कार्ड

घ. बैंक खाते की पास बुक

2. ऋणी की वर्तमान समय की फोटो

3. आय के स्रोत का प्रमाण-पत्र

अ. आयकरण विवरणी जो आयकर विभाग को प्राप्त कराई गई है (प्रतिलिपि)

ब. फार्म - 16 जो नियोक्ता द्वारा जारी किया गया है (पिछले 2/3 वर्ष का)

4. ऋणी के अस्तियाँ व देयताओं का विवरण *(statement of assets and liablities)* इसके अन्तर्गत ऋणी को अपनी चल/अचल सम्पत्ति एवं उसके द्वारा देयताओं *(liabilities / loan raised by him)* का विवरण देना होता है।

5. ऋण के भुगतान हेतु प्रस्तावित प्रतिभूति *(security)* या जमानतदार का विवरण :

अ. प्रतिभूति के अन्तर्गत निम्नांकित मूल प्रपत्रों को बैंक में बन्धक रखना होता है *(mortagage of properties)*

क. *TDR or FDR* (सावधि मियादी जमा)

ख. *NSC* (राष्ट्रीय बचत प्रपत्र)

ग. *KVP* (किसान विकास प्रपत्र)

घ. *LIC* (जीवन-सुरक्षा प्रपत्र) जैसे *Insurance policy*

ङ भूमि या भवन सम्बन्धी प्रपत्र इत्यादि

या

ब. वित्तीय सुदृढ़ व्यक्ति द्वारा जमानत

6. प्रस्तावित क्रय या निर्माण किये जाने वाले भवन का विवरण

अ. विक्रय का करार नामा *(Agreement to sale)*

ब. भवन निर्माण की स्थिति में आर्किटेक्ट का आँकलन *(estimate)*

स. अन्य सपोर्टिंग कागजात

7. ऋण की स्वीकृति

आवेदन पत्र के साथ प्रस्तुत अन्य प्रपत्र के निरीक्षण के उपरान्त यदि ऋणी पात्र है तो आवेदित ऋण की धनराशि स्वीकृत हो जाती है।

8. गृह ऋण का भुगतान

सामान्यतः गृह ऋण की अदायगी *(*मूलधन + ब्याज*)* 15 वर्षों में मासिक किस्तों में की जाती है। मासिक किस्तों की अदायगी दो प्रकार से सम्भव है। प्रथम प्रकार से ऋण की अदायगी में कुल ऋण की मासिक निश्चित किस्त बैंक के द्वारा तय की जाती है। इस किस्त के साथ कुल शेष राशि पर ब्याज भी देना होता है। प्रतिमाह निश्चित किस्त की धनराशि मूल धन से कम होती जाती है। इस प्रकार शेष धनराशि *(*मूल धन-किस्त*)* पर ब्याज कम होता जाता है। अतः अदा करने वाली धन राशि *(*प्रतिमाह निश्चित किस्त + शेष धनराशि पर ब्याज*)* का मान प्रतिमाह परिवर्तित होता रहता है। इस प्रकार की ऋण अदायगी व्यवस्था में प्रारम्भिक वर्षों में ब्याज की धनराशि अपेक्षाकृत काफी अधिक होती है और भुगतान के अन्तिम वर्षों में काफी कम होती है। किन्तु प्रतिमाह देय धनराशि सम्पूर्ण भुगतान अवधि में एक जैसी नहीं रहती है जो ऋणी के लिए सुविधाजनक नहीं होती है।

भुगतान की द्वितीय पद्धति में ऋण की सम्पूर्ण धनराशि की प्रतिमाह देय एक समान किस्त बना दी जाती है। इसी प्रकार प्रतिमाह देय धनराशि को बैंक की भाषा में *equated monthly instalment (EMI)* कहते हैं। यह पद्धति ऋणी को सुविधाजनक होती है। इसे निम्नवत् समझा जा सकता है :

स्वीकृत ऋण की धनराशि	=	₹ 10,000.00
माना ब्याज	=	10% वार्षिक
समय	=	15 वर्ष = 180 मास
EMI	=	₹ 10,750/-

गृह ऋण लेना उचित आर्थिक निर्णय

गृह ऋण उचित आर्थिक निर्णय है इसको निम्नांकित रूप से समझा जा सकता है।

1. यदि व्यक्ति वर्तमान में किराये के मकान में रह रहा है, तो गृह-ऋण के द्वारा गृह क्रय करके वह उस गृह में रहकर ऋण की मासिक किस्त (जो लगभग व्यक्ति द्वारा मकान के किराये के रूप में दी जा रही थी) से दे सकता है।
2. यदि व्यक्ति के पास स्वयं का मकान है तो भी वह गृह-ऋण के द्वारा गृह खरीद कर या निर्माण कर गृह को किराये पर दे सकता है और उससे प्राप्त किराये की राशि को गृह ऋण अदा करने में उपयोग कर सकता है और ऋण अदायगी के बाद सम्पत्ति (घर के रूप में) का मालिक बन जाता है।
3. यदि ऋणी आयकर दाता है तो गृह-ऋण के भुगतान पर कुछ विशेष परिस्थितियों में आयकर में छूट का लाभ भी प्राप्त कर सकता है।